Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 38, 1993.

CÁLCULO DE UN INVARIANTE AFIN UNIMODULAR EN EL CASO DEL n-SIMPLEX

L. Van Nypelseer

Presentado por Luis Santaló

Abstract

The affine unimodular invariant J_n, introduced by L.A. Santalo, measures the pairs of parallel hyperplanes containing a convex set of the n-dimensional affine space. Among the convex sets with volume V, the ball is the one which maximizes J_n. A conjecture of L.A. Santalo says that the n-simplex minimizes J_n. The following paper shows that for a n-simplex, the value of J_n is

$$\frac{n(n+1)}{2n!\,V}$$

1 Introducción

El invariante afin unimodular J_n, introducido por L.A. Santaló ([1]), mide el volumen de los pares de hiperplanos paralelos que contienen a un conjunto convexo C del espacio afín de dimension n. Su valor es:

$$J_n = \int_{\frac{1}{2}S^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\Omega}{\Delta(\Omega)^n}$$

donde S^{n-1} es la esfera de radio 1 y Δ es la anchura de C en la dirección Ω.

Se sabe que dentro de los convexos del mismo volumen V, el que maximiza J_n es la bola ([1]). L.A. Santaló ha conjeturado que el mínimo era alcanzado para un n-simplex. El siguiente trabajo consiste en el cálculo del valor de J_n para un n-simplex de volumen V. El valor obtenido es:

$$J_n(n\text{–simplex}) = \frac{n(n+1)}{2n!\,V}$$

2 Preliminares

Dado que J_n es invariante por transformaciones afines de determinante 1, su valor es igual para todos los n-símplices del mismo volumen V. En lo que sigue hacemos el calculo explícito para un n-simplex regular; el resultado será válido para cualquier simplex del mismo volumen.
Sea S_n un n-simplex regular de $\mathbb{R}^n$. Llamemos $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sus vértices. Ubicamos S_n en un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ del siguiente modo:

- p_0 en el origen del sistema de coordenadas.
- p_i en el subespacio $\langle x_1, \ldots, x_i\rangle$ a una distancia h_i del subespacio $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle$, con la última coordenada positiva (para cada i, $1 \leq i \leq n$).

Comentarios: con esta elección del sistema de coordenadas aparecen las siguientes propiedades:

1) • p_n tiene por primera coordenada $(p_n)_1 = \frac{1}{2}h_1$;
   • p_n tiene por ultima coordenada $(p_n)_n = h_n$ (1)

2) La intersección de S_n con el subespacio $\langle x_1, \ldots, x_i\rangle$ es un simplex regular S_i para cada $i \leq n$. Es decir: $\langle x_1, \ldots, x_i\rangle \cap S_n = S_i$. (2)

3) Se puede demostrar que el volumen de un tal simplex está dado por

$$V = h_n \cdot h_{n-1} \cdots h_2 \cdot h_1 \tag{3}$$

La anchura de un convexo en una dirección Ω se define como la distancia entre los hiperplanos de apoyo perpendiculares a esta dirección. En el caso del n-simplex, claramente todos los hiperplanos de apoyo salvo un conjunto de medida nula contienen exactamente dos vértices. Dado que el n-simplex

es regular, en el calculo de J_n bastará con integrar sobre el conjunto de los hiperplanos que contienen a p_0 y p_1 y después multiplicar el resultado por el número de aristas, o sea $\frac{n(n+1)}{2}$;
Así,

$$J_n = \frac{n(n+1)}{2} I_n \tag{4}$$

donde I_n es la restricción de J_n a los hiperplanos que contienen a p_0 y p_1.

3 Cálculo del valor de J_n

Vamos a establecer primero una relación entre el valor de I_{n+1} asociado con el $(n+1)$-simplex S_{n+1} y el valor de I_n, correspondiente al n-simplex S_n. En primer lugar, asociamos a cada direccion Ω sus coordenadas esféricas. En $\mathbb{R}^{n+1}$, una dirección $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_{n+1})$ se puede definir por n ángulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de modo que

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \operatorname{sen}\alpha_1 \cdots \operatorname{sen}\alpha_n \\
\Omega_2 &= \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_n \\
&\vdots \\
\Omega_i &= \cos\alpha_{i-1} \operatorname{sen}\alpha_i \cdots \operatorname{sen}\alpha_n \qquad 1 \leq i \leq n \\
\Omega_{n+1} &= \cos\alpha_n
\end{aligned}$$

donde $\alpha_1 \in [0, 2\pi[$, $\alpha_i \in [0, \pi[\quad 1 \leq i \leq n$.
De esta manera, α_i mide el ángulo entre la proyección ortogonal de Ω en el subespacio $\langle x_1, \ldots, x_{i+1}\rangle$ y el eje x_{i+1}. Se puede demostrar que

$$\mathrm{d}\Omega = \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}^2\alpha_3 \cdots \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_n \, \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_n \tag{5}$$

Lema 1. $\Delta(\Omega) = |\operatorname{sen}\alpha_1 \cdots \operatorname{sen}\alpha_n|\, h_1$ (6)

Demostración: Sean π_0 y π_1 los dos hiperplanos de apoyo perpendiculares a Ω. Acordamos que π_0 contiene al punto p_0 y π_1 al punto p_1. De este modo, la distancia entre π_0 y π_1 es la distancia de π_1 al origen del sistema. La ecuación de π_1 es $\Omega_1 x_1 + \cdots + \Omega_n x_n = d$, donde $|d|$ es la distancia de π_1 al origen. Dado que π_1 contiene al punto $p_1 = (h_1, 0, \ldots, 0)$ se deduce que $d = h_1\Omega_1 = h_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \cdots \operatorname{sen}\alpha_n$, de donde se sigue el resultado.

Proposición. $I_{n+1} = \dfrac{I_n}{h_{n+1}}$

La demostración se deducirá del cálculo de la integral en $\mathbb{R}^{n+1}$. Para esto, estudiemos primero los dominios de integración: llamemos D_i el dominio de variación de los ángulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ (por (2), D_i es el dominio de variación de los ángulos de un $(i+1)$-simplex S_{i+1}). Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ fijados en el dominio D_{n-1}, sean β_0 y β_1 los límites de variación del ángulo α_n.

Lema 2. $$\frac{1}{\tan\beta_1} - \frac{1}{\tan\beta_0} = \frac{h_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \cdots \operatorname{sen}\alpha_{n-1}}{h_{n+1}} \tag{7}$$

Demostración: Una vez fijados $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, el ángulo α_n varía entre los ángulos

- β_0 del hiperplano π_0 que contiene al vértice p_{n+1}
- β_1 del hiperplano π_1 que contiene al vértice p_{n+1}

El punto p_{n+1} tiene coordenadas $((p_{n+1})_1, \ldots, (p_{n+1})_{n+1})$ tales que $(p_{n+1})_1 = \frac{1}{2}h_1$ y $(p_{n+1})_{n+1} = h_{n+1}$ (por (1)).
Dado que p_{n+1} pertenece al hiperplano π_0 cuya normal $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_{n+1})$ tiene ángulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0)$ se deduce que

$$\Omega_1 \frac{h1}{2} + \Omega_2 (p_{n+1})_2 + \cdots + \Omega_n (p_{n+1})_n + \Omega_{n+1} h_{n+1} = 0,$$

o sea :

$$\operatorname{sen}\alpha_1 \cdots \operatorname{sen}\alpha_{n-1} \operatorname{sen}\beta_0 \frac{h1}{2} + \Omega_2 (p_{n+1})_2 + \cdots + \Omega_n (p_{n+1})_n + \cos\beta_0 h_{n+1} = 0.$$

Luego, $$\frac{1}{\tan\beta_0} = \frac{\cos\beta_0}{\operatorname{sen}\beta_0} = \frac{1}{h_{n+1}}(-\operatorname{sen}\alpha_1 \cdots \operatorname{sen}\alpha_{n-1} \operatorname{sen}\beta_0)\frac{h1}{2}$$
$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\beta_0}(\Omega_2 (p_{n+1})_2 + \cdots + \Omega_n (p_{n+1})_n) \tag{8}$$

Por otro lado, π_0 es la imagen de π_1 por la translación paralela al eje x_1 de longitud h_1. Luego, π_1 contiene a p_{n+1} exactamente cuando π_0 contiene al punto p'_{n+1} de coordenadas

$$\left(-\frac{h_1}{2}, (p_{n+1})_2, \ldots, (p_{n+1})_n, h_{n+1}\right).$$

Del mismo modo que antes, se deduce que

$$\frac{1}{\tan\beta_1} = \frac{1}{h_{n+1}}(\operatorname{sen}\alpha_1\cdots\operatorname{sen}\alpha_n\operatorname{sen}\beta_0)\frac{h_1}{2}-\frac{1}{\operatorname{sen}\beta_0}(\Omega_2(p_{n+1})_2+\cdots+\Omega_n(p_{n+1})_n) \tag{9}$$

Restando (8) de (9) se obtiene el resultado.

Demostración de la proposición : Haciendo el cálculo explícito de la integral se obtiene :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_{D_n}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\Delta(\Omega)^{n+1}}\\
&= \int_{D_n}\frac{1}{h_1^{n+1}\operatorname{sen}^{n+1}\alpha_1\cdots\operatorname{sen}^3\alpha_{n-1}}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha_n}\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \quad (\text{por } (5),(6))\\
&= \int_{D_{n-1}}\frac{1}{h_1^{n+1}\operatorname{sen}^{n+1}\alpha_1\cdots\operatorname{sen}^3\alpha_{n-1}}\Big(\int_{\beta_0}^{\beta_1}\frac{d\alpha_n}{\operatorname{sen}^2\alpha_n}\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_{n-1}\\
&= \int_{D_{n-1}}\frac{1}{h_1^{n+1}\operatorname{sen}^{n+1}\alpha_1\cdots\operatorname{sen}^3\alpha_{n-1}}\Big(\frac{1}{\tan\beta_1}-\frac{1}{\tan\beta_0}\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_{n-1}\\
&= \int_{D_{n-1}}\frac{1}{h_{n+1}h_1^{n}\operatorname{sen}^{n}\alpha_1\cdots\operatorname{sen}^2\alpha_{n-1}}\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_{n-1} \quad (\text{por}(7))\\
&= \frac{1}{h_{n+1}}I_n.
\end{aligned}$$

4 El Resultado

Un cálculo elemental muestra que $I_1 = h_1$ y de la proposición se deduce que $I_n = \frac{1}{h_1\cdots h_n}$. Luego $J_n = \frac{1}{2}n(n+1)\cdot I_n = \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{h_1\cdots h_n}$

Combinando este resultado con el valor de V (3), se deduce que

$$J_n = \frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{n!}\frac{1}{V}.$$

(Trabajo realizado en la Universidad de Buenos Aires bajo la dirección de L.A. Santaló)

5 Bibliografía

- 1 - L.A. Santaló, Un nuevo invariante afín para las figuras convexas del plano y del espacio - Mathematicae Notae, Año XVI

Recibido en marzo de 1992.