Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 39, 1994.

SOLUCIONES DE LA ECUACION $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ EN $H^2(B,\mathbf{R}^3)$

ENRIQUE LAMI DOZO - MARÍA CRISTINA MARIANI

ABSTRACT. We prove that in certain cases, a solution of this equation has isothermal coordinates. Then, if the image of this solution is an embedded surface in $\mathbf{R}^3$, it will have the prescribed mean curvature H.

1 - INTRODUCCION

Si $B = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2;\ u^2 + v^2 < 1\}$ es el disco unidad, dada la integral de Dirichlet $D(X) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla X|^2$ en el espacio de Sobolev $H^1(B,\mathbf{R}^3)$, un punto crítico X para variaciones en $C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ en las variables dependientes: $dD(X)(\varphi) = 0$ para $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y en las variables independientes: $\frac{d}{d\varepsilon}D(X \circ g_\varepsilon^{-1})|_{\varepsilon=0} = 0$ para toda familia de difeomorfismos $g_\varepsilon : \overline{B} \to \overline{B_\varepsilon}$ que dependen en forma diferenciable de un parámetro $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, con $g_0 =$ id resulta, para ciertos X, una solución al problema de Plateau, o sea, las coordenadas (u,v) son isotermas para la función armónica X y $X(B)$ es una superficie de área mínima que se apoya en la curva $X/_{\partial B}$ [4].

Para la funcional D_H asociada a la ecuación de la curvatura media prescripta

$$(H) \quad \Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$$

(c.f. [3]) damos condiciones sobre la función real y continua H en $\mathbf{R}^3$ para que un punto crítico más regular: $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$, para variaciones en las variables dependientes más grandes: $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$, tenga sus coordenadas isotermas, de manera que si $X(B)$ es una superficie inmersa in $\mathbf{R}^3$, ésta tiene curvatura media $H(X)$ y se apoya en $X/_{\partial B}$.

NOTACIONES Notamos con $W^{m,p}(B,\mathbf{R}^3)$ a los espacios de Sobolev usuales [1] y $W^{m,2}(B,\mathbf{R}^3) = H^m(B,\mathbf{R}^3)$.

Para $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, $\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} = \left(\int_{\partial B} |\operatorname{Tr} X|^2 \right)^{1/2}$ con $\operatorname{Tr} : H^1(B,\mathbf{R}^3) \to L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)$ el operador usual de traza [1].

Si $Y \in L^\infty(U,\mathbf{R}^n)$, $\|Y\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{w\in U} |Y(w)|$.

Por ejemplo, para $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ y $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$,

$$\|H\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbf{R}^3} |H(\xi)|, \quad \|Q\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbf{R}^3} |Q(\xi)|$$

y

$$\|H(X)\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{w\in B} |H(X(w))|, \quad \|Q(X)\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{w\in B} |Q(X(w))|$$

Finalmente, η y σ denotarán los campos vectoriales normal y tangente a ∂B, respectivamente, y para $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$, $\dfrac{\partial X}{\partial \eta}$ es la traza de la derivada radial $\dfrac{\partial X}{\partial r}$.

2 - ESTIMACIONES DE LA FUNCIONAL D_H

Dada $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, continua y acotada, se definen como en [3] el campo vectorial Q asociado a H

$$Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

$$Q(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \left(\int_0^{\xi_1} H(s,\xi_2,\xi_3)\,\mathrm{d}s\,,\ \int_0^{\xi_2} H(\xi_1,s,\xi_2)\,\mathrm{d}s\,,\ \int_0^{\xi_3} H(\xi_1,\xi_2,s)\,\mathrm{d}s \right)$$

y si $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$, la funcional D_H asociada a H, como

$$D_H : H^1(B,\mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}$$

$$D_H(X) = 1/2 \int_B |\nabla X|^2 + 2/3 \int_B Q(X)\cdot X_u \wedge X_v$$

Llamando $V(X) = 1/3 \int_B Q(X)\cdot X_u \wedge X_v$ en analogía con [4], cuando H es una constante, obtenemos que

$$D_H(X) = D(X) + 2V(X)$$

Como $|D_H(X)| \le D(X) + 2/3\|Q\|_\infty D(X)$, D_H está bien definida para $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$ y además, $D_H(X) \ge D(X) - 2/3\|Q\|_\infty D(X)$ de donde se deduce en forma inmediata que si $\|Q\|_\infty < 3/2$, $D_H(X) \ge k D(X)$ donde k es una constante positiva.

A partir de la desigualdad

$$\left| \int_B Y \cdot X_u \wedge X_v \right| \le c\|\nabla Y\|_2 \|\nabla X\|_2^2$$

válida para $Y \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$ ([2], Lemma A.3) se deduce que si $H \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$, $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$,

$$\left| \int_B H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi \right| \leq c \|\nabla(H(X)\varphi)\|_2 \|\nabla X\|_2^2$$

Como

$$\nabla(H(X)\varphi) = d(H(X))\varphi + H(X)\nabla\varphi \tag{1}$$

de $d(H(X)) = dH(X) \circ dX$ sale $|\nabla(H(X))| \leq \|\nabla H\|_\infty |\nabla X|$,
luego, si $H \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ y $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, $|\nabla H(X)| \in L^2(B,\mathbf{R}^3)$ y
$\left(\int_B |\nabla H(X)|^2\right)^{1/2} \leq \|\nabla H\|_\infty \|\nabla X\|_2$.

Por lo tanto, si $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, a partir de (1), obtenemos que

$$\int_B |\nabla(H(X)\varphi)|^2 \leq \int_B (|d(H(X))\varphi| + |H(X)\nabla\varphi|)^2 \leq 2 \int_B (|d(H(X))\varphi|^2 + |H(X)\nabla\varphi|^2) \leq 2\left[\|\varphi\|_\infty^2 \|\nabla H\|_\infty^2 \|\nabla X\|_2^2 + \|H\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_2^2\right]$$

y entonces, la integral $2\int_B H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi$ resulta bien definida y

$$\left|2 \int_B H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi\right| \leq 2c \|\nabla X\|_2^2 \left\{2\left[\|\varphi\|_\infty^2 \|\nabla H\|_\infty^2 \|\nabla X\|_2^2 + \|H\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_2^2\right]\right\}^{1/2}.$$

Por último, para $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$, $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$ y $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, tenemos de $2|\xi \wedge \eta| \leq |\xi|^2 + |\eta|^2$ en $\mathbf{R}^3$ una estimación más directa

$$\left|2 \int_B H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi\right| \leq \|H\|_\infty \|\varphi\|_\infty \|\nabla X\|_2^2$$

3 - PUNTOS CRITICOS DE D_H EN $H^2(B,\mathbf{R}^3)$

Veremos que si $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ es un punto crítico de D_H para variaciones en $C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$, entonces X es una solución de la ecuación de curvatura media prescripta (H) y las coordenadas (u,v) de X son isotermas, es decir

$$|X_u| = |X_v| \quad \text{y} \quad X_u \cdot X_v = 0 \text{ p.p. en } B$$

Por último, en los Teoremas 3, 4, 5 y 6 demostramos propiedades generales de las soluciones de (H) y de los puntos críticos de D_H en $H^2(B,\mathbf{R}^3)$

LEMA 1 *Sean* $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ *y* $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$, *si* $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$ *y* $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ *para* $i \neq j$, $i,j = 1,2,3$, *entonces la derivada direccional de* D_H *en* X *en la dirección* φ *está dada por*

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi] - \frac{2}{3}\int_{\partial B} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \varphi d\sigma$$

OBSERVACIÓN Si definimos como solución débil de la ecuación de curvatura media prescripta (H) a $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$ tal que $\int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, entonces bajo las hipótesis del Lema 1, si X es un punto crítico de D_H, X resulta una solución débil de (H).

Demostración del Lema 1 Sean $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ y $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$, entonces, la derivada direccional $dD_H(X)(\varphi)$ está dada por:

$$(2) \qquad dD_H(X)(\varphi) = \int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi +$$
$$+ 2/3 \int_B (Q(X) \cdot X_u \wedge \varphi_v + Q(X) \cdot \varphi_u \wedge X_v + H(X)\varphi \cdot X_u \wedge X_v) +$$
$$+ 2/3 \int_B \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2 \right) \cdot X_u \wedge X_v$$

con $\dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}(X)$, etc. ya que

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi + 2/3 \int_B \left[{}^d/_{d\varepsilon} Q(X + \varepsilon\varphi) \right]_{\varepsilon=0} \cdot X_u \wedge X_v +$$
$$+ 2/3 \int_B Q(X) \cdot \varphi_u \wedge X_v + 2/3 \int_B Q(X) \cdot X_u \wedge \varphi_v$$

con

$$\left[{}^d/_{d\varepsilon} Q(X + \varepsilon\varphi) \right]_{\varepsilon=0} =$$
$$= H(X)\varphi + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2 \right)$$

y reemplazando esta última expresión en (3), obtenemos (2).

Ahora, como $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$, integrando por partes obtenemos que:

$$\int_B Q(X) \cdot X_u \wedge \varphi_v du dv = \int_{-1}^{1} \left[Q(X) X_u \wedge \varphi \right]_{v=-(1-u^2)^{1/2}}^{v=(1-u^2)^{1/2}} du -$$
$$- \int_B \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} Q(X) \right) \cdot X_u \wedge \varphi + Q(X) \cdot X_{uv} \wedge \varphi \right] du dv =$$
$$= \int_{\partial B} (Q(X) \cdot X_u \wedge \varphi) v \, d\sigma - \int_B H(X) X_v \cdot X_u \wedge \varphi du dv -$$
$$- \int_B \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2} X_{2v} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3} X_{3v}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1} X_{1v} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3} X_{3v}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1} X_{1v} + \right.$$
$$\left. \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2} X_{2v} \right) \cdot X_u \wedge \varphi du dv - \int_B Q(X) \cdot X_{uv} \wedge \varphi du dv$$

y también,

$$\int_B Q(X) \cdot \varphi_u \wedge X_v = \int_{\partial B} [Q(X) \cdot \varphi \wedge X_v] u d\sigma - \int_B H(X) X_u \cdot \varphi \wedge X_v du dv$$
$$- \int_B \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2} X_{2u} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3} X_{3u}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1} X_{1u} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3} X_{3u}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1} X_{1u} + \right.$$
$$\left. \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2} X_{2u} \right) \cdot \varphi \wedge X_v du dv - \int_B Q(X) \cdot \varphi \wedge X_{uv} du dv$$

Sumando y reemplazando en (2), se obtiene que

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla \varphi$$
$$+ 2/3(3H(X)\varphi \cdot X_u \wedge X_v)] + 2/3 \int_{\partial B} Q(X) \cdot \varphi \wedge (u X_v - v X_u) d\sigma$$

Pero por ser $u X_v - v X_u = \dfrac{\partial X}{\partial \sigma}$, llegamos a:

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi] -$$
$$2/3 \int_{\partial B} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \varphi d\sigma \tag{4}$$

TEOREMA 1 *Supongamos que* $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ *para* $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, *y que* $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$. *Sea* $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ *tal que* $dD_H(X)(\varphi) = 0$ *para todo* $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$. *Entonces* X *es una solución débil de* (H) *y* $\dfrac{\partial X}{\partial \eta} = 2/3 Q(X) \wedge \dfrac{\partial X}{\partial \sigma}$ *en* $L^2(\partial B, \mathbf{R}^3)$.

En particular, $\dfrac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial \sigma} = 0$ *pp en* ∂B.

Además, si H *es constante y* $X \in L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$, *se obtiene que*

$$\frac{\partial |X|^2}{\partial \eta} = X \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0 \quad \text{pp en } \partial B$$

Demostración A partir de la expresión (4) del Lema 1, si $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$, tomando $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ obtenemos que

$$\int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi = 0$$

y por lo tanto, X resulta una solución débil de (H).

Además, $\int_B [-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v] \cdot \varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ y por lo tanto, como $-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v \in L^1(B, \mathbf{R}^3)$, obtenemos que $-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v = 0$ pp en B.

Ahora, volviendo a (4), tenemos que para $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$,

$$0 = \int_B [-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v] \varphi + \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \varphi d\sigma - 2/3 \int_{\partial B} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \varphi d\sigma =$$
$$= \int_{\partial B} \left[\frac{\partial X}{\partial \eta} - 2/3 Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right] \cdot \varphi d\sigma,$$

y entonces obtenemos que

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} - 2/3 Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0 \qquad \text{en } L^2(\partial B, \mathbf{R}^3) \tag{5}$$

Por último, si $H(X) = H_0 \in \mathbf{R}$, entonces $Q(X) = H_0 X$, $Q(X) \in L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$ para $X \in L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$ con lo cual D_H resulta bien definido y, además, $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} = 0$ para $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

La expresión (5) implica que

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = 2/3 H_0 X \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \quad \text{pp en } \partial B,$$

y multiplicando escalarmente por X, obtenemos que

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X = 0 \quad \text{pp en } \partial B,$$

lo cual completa la demostración.

TEOREMA 2 *Supongamos que* $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, $\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ *para* $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$ *,y sea* $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ *tal que* $dD_H(X)(\varphi) = 0$ *para toda* $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$ *y* $\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| = \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right|$ *en* ∂B. *Entonces las coordenadas* (u,v) *de* X *son isotermas, es decir,*

$$|X_u| = |X_v| \quad y \quad X_u \cdot X_v = 0 \quad pp\ en\ B\ (X\ es\ conforme)$$

Demostración Veamos que si $|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0$ en $L^1(\partial B, \mathbf{R}^3)$, entonces $|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0$ en $L^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Extendemos X a $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}$ por inversión con respecto de ∂B, o sea, para $r^2 = u^2 + v^2$ definimos

$$Y(u,v) = \begin{cases} X(u,v) & \text{en } B \\ X\left(u/r^2, v/r^2\right) & \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \overline{B} \end{cases}$$

Veamos que

$$(6) \qquad \begin{cases} \Delta Y = 2H(Y) Y_u \wedge Y_v & \text{en } B \\ \Delta Y = -2H(Y) Y_u \wedge Y_v & \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \overline{B} \end{cases}$$

En efecto, si se hace el cambio de coordenadas $(u,v) \longrightarrow (u',v') = \left(u/r^2, v/r^2\right)$ con $r^2 = u^2 + v^2$, y J es el jacobiano correspondiente, tenemos que $J^{-1} = \frac{-1}{r^4}$

Ahora, si $Y(u,v) = X\left(u/r^2, v/r^2\right)$, entonces,

$$Y_{uu} + Y_{vv} = -J^{-1}(X_{uu} + X_{vv})$$
$$Y_u \wedge Y_v = J^{-1}(X_u \wedge X_v)$$

en los puntos correspondientes.

Pero si $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$, entonces $\Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v$ en B, y por lo tanto, $\Delta Y = 2H(Y) Y_u \wedge Y_v$ para $(u,v) \in B$. Si $(u,v) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta Y(u,v) &= -\Delta X\left(u/r^2, v/r^2\right) J^{-1} = -2H(X) X_u \wedge X_v\left(u/r^2, v/r^2\right) J^{-1} \\ &= -2H(Y) Y_u \wedge Y_v(u,v) \end{aligned}$$

Ahora, si la medida conforme de Y es la aplicación $F(u,v) = |Y_u|^2 - |Y_v|^2 - 2iY_u \cdot Y_v$, veremos que F es holomorfa en $\mathbf{C}$.

F es holomorfa en $\mathbf{C} \setminus \partial B$ pues $F(u,v) = F_1(u,v) + iF_2(u,v)$ con $F_1(u,v) = |Y_u|^2 - |Y_v|^2$, $F_2(u,v) = -2Y_u \cdot Y_v$ y F_1, F_2 verifican débilmente las condiciones de Cauchy-Riemann en $\mathbf{C} \setminus \partial B$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = 2(Y_u \cdot Y_{uu} - Y_v \cdot Y_{vu}), \frac{\partial F_2}{\partial v} = -2(Y_{uv} \cdot Y_v + Y_u \cdot Y_{vv}),$$

luego

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = \frac{\partial F_2}{\partial v} \Longleftrightarrow 2Y_u \cdot Y_{uu} - 2Y_v \cdot Y_{vu} = -2Y_{uv} \cdot Y_v - 2Y_u \cdot Y_{vv} \Longleftrightarrow Y_u \cdot \Delta Y = 0$$

y

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = -2(Y_{uu} \cdot Y_v + Y_u \cdot Y_{vu}), \frac{\partial F_1}{\partial v} = 2(Y_u \cdot Y_{uv} - Y_v \cdot Y_{vv})$$

entonces,

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = -\frac{\partial F_2}{\partial u} \Longleftrightarrow 2Y_u \cdot Y_{uv} - 2Y_v \cdot Y_{vv} = 2Y_{uu} \cdot Y_v + 2Y_u \cdot Y_{vu} \Longleftrightarrow Y_v \cdot \Delta Y = 0$$

Como el operador de Cauchy-Riemann es elíptico y F es una solución débil en $\mathbf{C} \setminus \partial B$, F es holomorfa en $\mathbf{C} \setminus \partial B$. Por último, tenemos que F es continua en ∂B, pues

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{r \to 1 \\ r>1}} (|Y_u|^2 - |Y_v|^2) = [|X_u|^2(v^2-u^2)^2 + |X_v|^2 4u^2v^2 + 2X_u \cdot X_v(v^2-u^2)(-2uv)] - \\
&- [|X_u|^2(-2uv)^2 + |X_v|^2(u^2-v^2)^2 + X_u \cdot X_v(u^2-v^2)(-2uv)] = \\
&= (|X_u|^2 - |X_v|^2)[(v^2-u^2)^2 - 4u^2v^2] + 2X_u \cdot X_v(u^2-v^2)4uv \\
&= 0 = \lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} (|Y_u|^2 - |Y_v|^2)
\end{aligned}$$

si $|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v$ pp en ∂B y

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{r \to 1 \\ r>1}} Y_u \cdot Y_v = (|X_u|^2 - |X_v|^2)[(v^2-u^2)(-2uv)] + \\
&X_u \cdot X_v[-(u^2-v^2)^2 + 4u^2v^2] = 0 = \lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} Y_u \cdot Y_v
\end{aligned}$$

por la misma razón.

Por lo tanto, F es holomorfa en $\mathbf{C}$, pero

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^2} |F(u,v)| \leq 2 \int_{R^2} (|Y_u|^2 + |Y_v|^2) = 4 \int_B (|Y_u|^2 + |Y_v|^2) = \\
&4 \int_B (|X_u|^2 + |X_v|^2) < +\infty,
\end{aligned}$$

pues

$$\int_{B^c} |\nabla Y|^2 = \int_{B^c} -\Delta Y \cdot Y + \int_{\partial B^c} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma = \int_{\partial B^c} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma +$$
$$+ \int_{B^c} -\Delta X\left(u/r^2, v/r^2\right) \cdot X\left(u/r^2, v/r^2\right) J^{-1} = \int_B -\Delta X(u', v') \cdot X(u', v') J^{-1} J +$$
$$+ \int_{\partial B^c} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma = \int_B |\nabla X|^2,$$

haciendo el cambio de variables $(u', v') = \left(u/r^2, v/r^2\right)$.

Pero entonces, $F \equiv 0$, y por lo tanto,

$$|Y_u|^2 - |Y_v|^2 = Y_u \cdot Y_v = 0,$$

y en particular,

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{pp en } B.$$

OBSERVACIONES

1) En forma recíproca al Teorema 1, tenemos que si $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ es una solución de la ecuación $\Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v$ en B y $\frac{\partial X}{\partial \eta} = 2/3 Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ en $L^2(\partial B, \mathbf{R}^3)$, entonces $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$

2) Si $H \in \mathbf{R}$, $(u, v) \in \partial B$ y $X \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$, en cada punto $X(u, v) \in \mathbf{R}^3$, X y $\frac{\partial X}{\partial \sigma}$ son coplanares, y están contenidos en el plano perpendicular a $\frac{\partial X}{\partial \eta}$, si $\frac{\partial X}{\partial \eta} \neq 0$.

3) Si además $\frac{\partial X}{\partial \eta}(u, v) \neq 0$, $X(u, v)$, $\frac{\partial X}{\partial \sigma}(u, v)$ y $\frac{\partial X}{\partial \eta}(u, v)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$ con la misma orientación que la base canónica si $H > 0$ para cada $(u, v) \in \partial B$.

TEOREMA 3 *Sea $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ una solución de la ecuación $\Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v$ en B. Entonces, $\int_B \left[|\nabla X|^2 + \left(\frac{|\nabla X|^2}{2}\right)_r r + 2H(X) X_r \cdot X_u \wedge X_v\right] = \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|^2 d\sigma \geq 0$, donde $X_r \equiv \frac{\partial X}{\partial r}$.*

Demostración Sea $X_1(u, v)$ la primer componente de $X(u, v)$, entonces $\int_B \text{div}\left[(uX_{1u} + vX_{1v}) \nabla X_1\right] = \int_{\partial B} (uX_{1u} + vX_{1v}) \nabla X_1 \cdot \eta d\sigma$

Luego,

$$\int_B \left[|\nabla X_1|^2 + (uX_{1uu} + vX_{1vu}, uX_{1uv} + vX_{1vv}) \cdot \nabla X_1 + (uX_{1u} + vX_{1v}) \Delta X_1\right] =$$
$$\int_{\partial B} (uX_{1u} + vX_{1v}) \nabla X_1 \cdot \eta d\sigma$$

Teniendo en cuenta que: $uX_{1u} + vX_{1v} = rX_{1r}$,

$(uX_{1uu} + vX_{1vu}, uX_{1uv} + vX_{1vv}) \cdot \nabla X_1 = r(\nabla X_1)_r \cdot \nabla X_1$,

y que $r\Delta X_1 X_{1r} = rX_{1r}2H(X)(X_{2u}X_{3v} - X_{3u}X_{2v})$, reemplazando,

$$\int_B \left[|\nabla X_1|^2 + r\left(\frac{|\nabla X_1|^2}{2}\right)_r + 2H(X)rX_{1r}(X_{2u}X_{3v} - X_{3u}X_{2v})\right] = \int_{\partial B} X_{1r}^2 \geq 0$$

y teniendo en cuenta esta última igualdad para $X_2(u,v)$ y $X_3(u,v)$ obtenemos que

$$\int_B \left[(|\nabla X|^2 + r\left(\frac{|\nabla X|^2}{2}\right)_r + 2H(X)rX_r \cdot X_u \wedge X_v\right] = \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| d\sigma \geq 0$$

TEOREMA 4 *Si* $H \doteq H_0 \in \mathbf{R}$ *y* $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(B,\mathbf{R}^3)$ *es tal que* $dD_H(X)(\varphi) = 0$ *para toda* $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$, *entonces si* $Y \in (X + H_0^1(B,\mathbf{R}^3)) \cap L^\infty(B,\mathbf{R}^3)$, $\left|\int_B Y_u \wedge Y_v\right| \leq \frac{1}{2|H_0|}\int_{\partial B}\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| d\sigma$

Demostración Sea $Y \in (X + H_0^1(B,\mathbf{R}^3)) \cap L^\infty(B,\mathbf{R}^3)$, veamos que entonces $\int_B Y_u \wedge Y_v = \int_B X_u \wedge X_v$: en efecto, para todo vector $c \in \mathbf{R}^3$, $2\int_B (Y_u \wedge Y_v - X_u \wedge X_v) \cdot c = \int_B \left[(Y - X)_u \wedge (Y + X)_v + (Y + X)_u \wedge (Y - X)_v\right] \cdot c = 0$, ya que se sabe que si $\varphi \in H_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y $\psi, \rho \in H^1(B,\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(B,\mathbf{R}^3)$, $\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v) \cdot \rho = \int_B (\rho_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \rho_v) \cdot \varphi$ ([4], pag 92)

Pero entonces, $\left|\int_B Y_u \wedge Y_v\right| = \left|\int_B X_u \wedge X_v\right| = \left|\int_B \frac{1}{2H_0}\Delta X\right| = \frac{1}{2|H_0|}\left|\int_B \Delta X\right| = \frac{1}{2|H_0|}\left|\int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} d\sigma\right| \leq \frac{1}{2|H_0|}\int_{\partial B}\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| d\sigma = \frac{1}{2|H_0|}\int_{\partial B}\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| d\sigma$, ya que por el Corolario del Teorema 2, sabemos que $\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right|^2 - \left|\frac{\partial X}{\partial r}\right|^2 = 0$ si $|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 \doteq X_u \cdot X_v$ pp en B.

TEOREMA 5 *Supongamos que* $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$, *y que* $\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ *para* $i,j = 1,2,3$ $i \neq j$. *Sea* $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ *tal que* $\|H(X)X\|_\infty < 1$ *y* $dD_H(X)(\varphi) = 0$ *para toda* $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$.

Entonces,

$$D(X) \leq \frac{\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \left\|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}}{2(1 - \|H(X)X\|_\infty)}$$

Demostración Sabemos que $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ pp en B, luego, $0 = \int_B [-\Delta X + 2H(X)X_u \wedge X_v] \cdot X = \int_B [|\nabla X|^2 + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot X] - \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X d\sigma \geq$

$2D(X)(1-\|H(X)X\|_\infty)-\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}\left(\int_{\partial B}\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} = 2D(X)(1-\|H(X)X\|_\infty)-\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}\left\|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}$, ya que por el Corolario del Teorema 2,

$$\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| = \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| \qquad \text{pp en } \partial B$$

TEOREMA 6 *Con las mismas hipótesis del Teorema 5, también se verifica la siguiente desigualdad:*

$$D(X) \leq \frac{\int_{\partial B}\frac{\partial |X|^2}{\partial \eta}d\sigma}{4(1-\|H(X)X\|_\infty)},$$

en particular

$$\int_{\partial B}\frac{\partial |X|^2}{\partial \eta}d\sigma \geq 0$$

Demostración Sabemos que $0 = \int_B \left[|\nabla X|^2 + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot X\right] - \int_{\partial B}\frac{\partial X}{\partial \eta}\cdot X d\sigma \geq 2D(X)(1-\|H(X)X\|_\infty) - \int_{\partial B}\frac{\partial X}{\partial \eta}\cdot X d\sigma$, y como $\int_{\partial B}\frac{\partial X}{\partial \eta}\cdot X d\sigma = \frac{1}{2}\int_{\partial B}\frac{\partial |X|^2}{\partial \eta}d\sigma$, la demostración queda completada.

REFERENCIAS

[1] Adams, Robert: Sobolev spaces, Academic Press, 1975.

[2] Brezis, H. - Coron, J.M.: Multiple solutions of H-Systems and Rellich's conjeture, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), 149-187.

[3] Hildebrandt, S.: Randwertprobleme für Flächen mit vorgeschriebenes mittlerer Krümmung und Anwendungen auf die Kapillaritätstheorie Teil I. Fest vorgegebener Rand. Math - Z. 112 (1969), 205-213.

[4] Struwe, M.: Plateau's problem and the calculus of variations, Math. Notes **35**, Princeton University Press, Princeton, 1989.

ENRIQUE LAMI DOZO
Inst. Argentino de Matemática, CONICET
Viamonte 1636, 1er. cuerpo, 1er. piso
1055 – Buenos Aires, Argentina
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

MARÍA CRISTINA MARIANI
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA
CONICET

Recibido en abril de 1992.
Versión modificada en abril 1994.