Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 39, 1994.

INTERCAMBIABILIDAD DEL CONJUNTO DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN JUEGOS N-PERSONALES CICLICOS

I.AURIOL - E.OLIVERA*)

Abstract In this paper we show the equivalence of interchangeability and convexity for the set of equilibrium in n-person cyclic games with special functions.

1 INTRODUCCION

H.H.Chin, Parthasaraty y T.E.S.Raghavan en [1], demostraron que en juegos bipersonales no cooperativos convexidad implica intercambiabilidad en el conjunto de puntos de equilibrio, y que esto no es verdadero para juegos de más de dos personas.

E.Marchi y L.Quintas en [3],introducen los juegos n-personales cíclicos en los cuales la función de pago de cada jugador se descompone en suma de otras dos con las siguientes características : una de ellas depende solamente de dicho jugador y del siguiente y la otra es independiente del jugador involucrado.

En este artículo, siguiendo la idea de H.H. Chin, Parthasaraty y T.Raghavan, demostramos que en estos juegos cíclicos intercambiabilidad y convexidad son conceptos equivalentes para un número arbitrario de jugadores . La discusión acerca de la unicidad es idéntica a la dada en [2].

2 PRELIMINARES

Sea Γ un juego n-personal en forma normal

$$\Gamma = \left\{ I_1, \ldots, I_n, A_1, \ldots, A_n \right\}$$

donde para $j = 1, \ldots, n$ I_j es el conjunto de estrategias puras del jugador j y $A_j : \mathop{X}_{j=1}^{n} I_j \longrightarrow \mathbb{R}$ su función de pago.

Sea $\tilde{\Gamma}$ la extensión mixta de Γ

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n, \mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n \right\}$$

donde $\mathbf{X}_j$ es el conjunto de estrategias mixtas del jugador j,es decir

$$\mathbf{X}_j = \left\{ x_j \in \mathbb{R}^{I_j} \ / \ x_j(i_j) \geq 0 \quad \forall\, i_j \ , \sum_{i_j \in I_j} x_j(i_j) = 1 \right\}$$

y $\mathbf{K}_j$ su función esperanza

$$\mathbf{K}_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \overset{n}{\underset{j=1}{\times}} I_j} \mathbf{A}_i(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j(i_j)$$

Un punto $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbf{X}_1 x \ldots x \mathbf{X}_n$ es llamado *punto de equilibrio de Nash* si :

$$\mathbf{K}_j(x'_1, \ldots, x'_{j-1}, x'_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_n) \geq \mathbf{K}_j(x'_1, \ldots, x'_{j-1}, x_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_n)$$

$$\forall\, x_j \in \mathbf{X}_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

Denotaremos con $\varepsilon \subseteq \mathbf{X}_1 x \ldots x \mathbf{X}_n$ al conjunto de todos los puntos de equilibrio.

Diremos que ε es *intercambiable* si para cada $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \varepsilon$ $(x^1_1, \ldots, x^1_n) \in \varepsilon$ se tiene que $(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}) \in \varepsilon$ donde $i_j = 0$ v $i_j = 1$ para todo j.

Si ε es intercambiable entonces ε es convexo.

Si n = 2 convexidad implica intercambiabilidad (ver [1])

Un juego n-personal Γ es *cíclico* si :

$$\mathbf{A}_j(i_1, \ldots, i_n) = \mathbf{A}^j_1\ (i_j, i_{j+1}) + \mathbf{A}^j_2\ (i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_n) \quad j = 1, \ldots, n-1$$

$$\mathbf{A}_n(i_1, \ldots, i_n) = \mathbf{A}^n_1\ (i_n, i_1) + \mathbf{A}^n_2\ (i_1, \ldots, i_{n-1})$$

3 INTERCAMBIABILIDAD

En esta sección probaremos en forma explícita el resultado de intercambiabilidad en el caso de n = 3 .La demostración se generaliza naturalmente para n arbitrario.

Sea $n = 3$

Considerando las funciones de pago

$$A_1(i,j,k) = A_1^1(i,j) + A_2^1(j,k)$$

$$A_2(i,j,k) = A_1^2(j,k) + A_2^2(k,i) \qquad i\in I_1\ ,\ j\in I_2,\ k\in I_3$$

$$A_3(i,j,k) = A_1^3(k,i) + A_2^3(i,j)$$

Se obtienen los siguientes resultados :

Lema : $(x',y',z') \in \varepsilon$ *si y solo si*

(I) $A_1^1(x',y') \geq A_1^1(x,y') \qquad \forall x\in X_1$

(II) $A_1^2(y',z') \geq A_1^2(y,z') \qquad \forall y\in X_2$

(III) $A_1^3(z',x') \geq A_1^3(z,x') \qquad \forall z\in X_3$

Dem.: inmediata.

Teorema 1 ε *es intercambiable, si* ε *es convexo.*

Dem. Sean $(x',y',z') \in \varepsilon$, $(x^1,y^1,z^1) \in \varepsilon$

Por ser ε convexo para todo λ, $\lambda \in [0,1]$

$$(x_\lambda,y_\lambda,z_\lambda) = (\lambda x' + (1-\lambda)x^1, \lambda y' + (1-\lambda)y^1, \lambda z' + (1-\lambda)z^1) \in \varepsilon$$

y por el lema $\qquad A_1(x_\lambda,y_\lambda) \geq A_1(x,y_\lambda) \qquad \forall x\in X_1$

En particular cuando $x = x'$ y $x = x^1$

$$A_1(x_\lambda,y_\lambda) \geq A_1(x',y_\lambda)$$

$$A_1(x_\lambda,y_\lambda) \geq A_1(x^1,y_\lambda)$$

de donde resulta

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A_1(x_\lambda,y_\lambda) = A_1(x',y_\lambda) \\ (2) & A_1(x_\lambda,y_\lambda) = A_1(x^1,y_\lambda) \end{array}\right. \qquad \forall\ \lambda,\ \lambda \in [0,1]$$

Si $\lambda = 0$

en (1) $\qquad A_1(x^1,y^1) = A_1(x',y^1)$

y si $\lambda = 1$

en (2) $\qquad A_1(x',y') = A_1(x^1,y')$

Obtenemos los siguientes puntos que verifican trivialmente la condición **(I)** del lema.

$$P_1 = (x',y^1,z') \ , \ P_2 = (x',y^1,z^1) \ , \ P_3 = (x^1,y',z') \ , \ P_4 = (x^1,y',z^1)$$

Trabajando en forma similar con $\mathbf{A}_2$ vemos que los siguientes puntos verifican la condición **(II)** del lema

$$P_5 = (x',y',z^1) \ , \ P_4 = (x^1,y',z^1) \ , \ P_1 = (x',y^1,z') \ , \ P_6 = (x^1,y^1,z')$$

En forma análoga con $\mathbf{A}_3$, los puntos

$$P_3 = (x^1,y',z') \ , \ P_6 = (x^1,y^1,z') \ , \ P_5 = (x',y',z^1) \ , \ P_2 = (x',y^1,z^1)$$

verifican la condición **(III)** del lema.

Es fácil ver que P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 y P_6 son puntos de equilibrio, lo cual demuestra la intercambiabilidad.

■

4 UNICIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO EN JUEGOS CICLICOS COMPLETAMENTE MIXTOS

Una estrategia mixta es *completamente mixta* si cada una de sus coordenadas es positiva. Se dice que un juego es *completamente mixto* si todo punto de equilibrio está formado por estrategias completamente mixtas.

En juegos bipersonales completamente mixtos el conjunto de puntos de equilibrio tiene un único elemento ([4]). Para juegos de más de dos personas esto no se verifica sin condiciones adicionales como, por ejemplo, convexidad del conjunto de puntos de equilibrio ([1]).

Sin embargo para el tipo de juego que estamos estudiando Marchi en[2] muestra el siguiente resultado : " *Si el juego es completamente mixto y las matrices* $\mathbf{A}_1^i$, $i \in \{1,\dots,n\}$, *de las funciones de pago son no singulares, entonces el juego tiene solución única y los valores son no nulos y están dados por*

$$x_{i+1} = \frac{\left[A_1^i\right]^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T \left[A_1^i\right]^{-1} \mathbb{1}} \qquad , \qquad v_i = \frac{1}{\mathbb{1}^T \left[A_1^i\right]^{-1} \mathbb{1}}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] H.H.Chin, T.Parthasarathy and T.E.S.Raghavan : Structure of equilibria in n-person non cooperative games. Int.Journal of Game Theory.Vol.3.Issue 1. Page 1-19.

[2] E.Marchi : The effective computation of equilibrium point for n-person games cyclic to the next person.

[3] E.Marchi and L.Quintas : Computing of equilibrium points for q - cyclic games. Proc.II. Latin American Congress-Brazil. Vol.II. Page 576-598.1983

[4] T.E.S.Raghavan : Completely mixed strategies in bimatrix games. J.London Math.Soc. (2). 2. 1970.

Departamento de Matemática
Fac. de Ciencias Físico,Matemáticas y Naturales
Universidad Nacional de San Luis
Ejército de Los Andes 950
San Luis (5700)

*) Instituto de Matemática Aplicada San Luis
Universidad Nacional de San Luis

Recibido en abril de 1992.