Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 39, 1994.

ACOTACION UNIFORME LOCAL DE LAS SOLUCIONES EN UN SISTEMA DE CONTROL CON RUIDO.

VERA W. DE SPINADEL

ABSTRACT

The numerical treatment of a control problem, using a step-by-step procedure, involves usually a certain informational noise of one type or another. Very often, it happens that small informational errors produce unstability in the solutions and the problem of regularization arises. In this paper, a local uniform boundedness of the solutions is proved, which turns to be useful in the design of "control with guidance".

1. INTRODUCCION

El tratamiento numérico de un problema de control consiste normalmente en un algoritmo en cuyos cálculos siempre entra ruido de información. Tal ruido puede, por ejemplo, consistir en mediciones imprecisas, retrasos del tiempo de medición, etc. Por lo tanto, la solución calculada no coincide con la solución teórica ideal y en el diseño práctico es preciso tener en cuenta la estabilidad de la solución ideal.

A ese respecto, es importante llegar a establecer estimaciones que permitan regularizar las soluciones del sistema de control para que sean estables respecto al ruido de información. En este trabajo, se prueba una acotación uniforme local de las soluciones, que puede ser muy útil para diseñar un control- guía, estando la evolución de la guía llevada a cabo por cálculos efectuados con una computadora.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA.

Sea $X(t_0, x_0)$ el conjunto de soluciones

$$x(.) : [t_0, \Theta] \to I\!R^n \tag{2.1}$$

de la inclusión diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \subset \text{ co } \{f(t_1 x(t), u, v) : u \in P;\ v \in Q\} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

donde co$\{.\}$ es la cápsula convexa del conjunto. P y Q son conjuntos conpactos en $I\!R^p$ y $I\!R^q$, respectivamente.

Si se trata de la descripción dinámica de un sistema controlado, entonces $u(t)$ se interpreta como un vector p-dimensional que caracteriza la acción controlante al tiempo t y el vector q-dimensional $v(t)$ corresponde a la perturbación actuante sobre el sistema al tiempo t. Si, en cambio, se trata de un juego diferencial de dos jugadores, los vectores u y v son los controles del primero y segundo jugador, respectivamente [**1**].

Sea la partición del intervalo temporal $[t_0, \Theta]$

$$\Delta = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k+1} = \Theta\}.$$

Supongamos que al tiempo $t = \tau_1$ se efectuan mediciones con una cierta imprecisión de la posición del sistema. Estas mediciones producen una variación en los vectores

$$x^*(\tau_i) = x(\tau_i) + y(\tau_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, k \tag{2.4}$$

donde $x(.)$ es el vector de posición real del sistema e $y(.)$ es el error de la medición efectuada en $t = \tau_i$.

Llamaremos "ruido de información" a la totalidad de errores $y(\tau_i)$ y la indicaremos $y(.)$.

En un proceso paso-a-paso, supondremos que el control del primer jugador tiene la forma

$$\begin{aligned} u^*(t) = u^*(\tau_i) &= U(\tau_i, x^*(\tau_i)) \\ &= U(\tau_i, x(\tau_i) + y(\tau_i)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$; $\quad i = 0, 1, \ldots, k$.

Sea $x(., t_0, x_0, U, v(.), \Delta, y(.))$ la trayectoria paso-a-paso del sistema controlado que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$, y ha sido generada por el control $u^*(.)$ dado por (2.5) acoplada con un cierto control medible $v(.) : [t_0, \Theta] \to Q$.

Sean los conjuntos

$$\mathcal{D}(t_0, x_0) \overset{\triangle}{=} \{(t, x(t)) \in T \times I\!R^n : t_0 \leq t \leq \Theta;\ x(.) \in X(t_0, x_0)\} \tag{2.6}$$

$$\mathcal{D}_0 \overset{\triangle}{=} \bigcup_{(t_0, x_0) \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} \mathcal{D}(t_0, x_0) \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}_1 \overset{\triangle}{=} \{(t, x+y) \in T \times I\!R^n : (t, x) \in \mathcal{D}_0,\ \|y\| \leq K\}, \tag{2.8}$$

donde T es el intervalo en el cual varía el tiempo t en el problema de control considerado y K es una cota para los errores.

Es fácil verificar que estos conjuntos son compactos en $T \times I\!R^n$ [**2**].

El estimado que vamos a obtener se usa cuando se consideran movimientos paso-a-paso en pequeños intervalos de tiempo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Se requiere un estimado que no dependa de la posición $x(\tau_i)$. Para obtener tal estimado uniforme usaremos el hecho que los movimientos paso-a-paso provienen de una posición inicial fija (t_0, x_0), por ende los grafos de tales movimientos paso-a-paso permanecen en un conjunto acotado $\mathcal{D}_0$. Los grafos de los movimientos concomitantes podrán ser inmersos en el conjunto $\mathcal{D}_1$.

Suponiendo que la función $f : T \times I\!R^n \times P \times Q \to I\!R^n$ es continua y lipschitziana, la podemos acotar de la siguiente manera:

$$\|f(t_1, x_1, u, v) - f(t_2, x_2, u, v)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\| + \varepsilon(\delta) \tag{2.9}$$

donde λ es constante y la función $\delta \to \varepsilon(\delta)$ satisface

$$\begin{cases} \varepsilon(\delta) > 0 & \text{para } \delta > 0 \\ \lim\limits_{\delta \to 0^+} \varepsilon(\delta) = 0 & \end{cases}$$

El estimado (2.9) es válido para todo par $(u, v) \in P \times Q$; $y(t_i, x_i) \in \mathcal{D}_1 (i = 1, 2)$ tal que $|t_1 - t_2| \leq \delta$ e.d. es uniforme en $\mathcal{D}_1 \times P \times Q$.

Sea

$$\Lambda = \max \|f(t, x, u, v)\| \tag{2.10}$$

para $(t, x) \in \mathcal{D}_1, (u, v) \in P \times Q$.

Sea $\xi \geq 0$ y sean las funciones

$$\alpha(\delta) \overset{\triangle}{=} 2[2\Lambda\delta + 1][\varepsilon(\delta) + \lambda\Lambda\delta] + 2\Lambda^2\delta \tag{2.11}$$

$$\alpha_{\#}(\delta,\xi) \overset{\triangle}{=} \alpha(\delta) + 2(\Lambda + \lambda)\xi \tag{2.12}$$

$$\beta_{\#}(t,\delta,\xi) \overset{\triangle}{=} \left[\xi^2 + \frac{\alpha_{\#}(\alpha,\xi)}{\lambda}\right] e^{2\lambda(t-t_{\#})} - \frac{\alpha_{\#}(\delta,\xi)}{\lambda} \tag{2.13}$$

Es fácil verificar que $\beta(.) = \beta_{\#}(.,\delta,\xi)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = 2\lambda\beta(t) + 2\alpha_{\#}(\delta,\xi) \\ \beta(t_{\#}) = \xi^2 \end{cases} \tag{2.14}$$

Elijamos ahora constantes $\delta_0 > 0$; $\xi_0 > 0$ tales que se cumpla la inecuación

$$\beta_{\#}(t,\delta,\xi) < 1 \quad \text{para } t \in [t_{\#},\delta], \delta \in (0,\delta_0), \xi \in (0,\xi_0) \tag{2.15}$$

y determinemos valores $u_0 \in P$; $v_0 \in Q$ a partir de las condiciones

$$\max_{v\in Q}\langle s^*, f(t_*,x^*,u_0,v)\rangle = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s^*, f(t_*,x^*,u,v)\rangle \tag{2.16}$$

$$\min_{u\in P}\langle s^*, f(t_*,x^*,u,v_0)\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s^*, f(t_*,x^*,u,v)\rangle \tag{2.17}$$

3. TEOREMA DE ESTIMACION.

Sean $\mathcal{D}_0, \beta_{\#}, \delta_0, \xi_0$ definidos por (2.7), (2.13) y (2.15). Sean u_0 y v_0 dos valores que satisfacen las condiciones (2,16) y (2,17). Supongamos que

$(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_0$

$\|x_* - x^*\| \le \xi$

$\|x_* - w_*\|^2 \le \beta_*(t_*,\delta,\xi)$

$\|s^* - (x_* - w_*)\| \le \xi$

para $\delta \in (0,\delta_0); \xi \in (0,\xi_0)$. Con $x(.) : [t_*,\Theta] \to I\!R^n$ y $w(.) : [t_*,\Theta] \to I\!R^n$ indicamos soluciones de

$$\dot{x}(t) \subset \mathcal{F}_1(t,x(t),u_0) \overset{\triangle}{=} \text{co}\{f(t,x(t),u_0,v) : v \in Q\}$$

$$\dot{w}(t) \subset \mathcal{F}_2(t,w(t),v_0) \overset{\triangle}{=} \text{co}\{f(t,w(t),u,v_0) : u \in P\}$$

con las condiciones iniciales $x(t_*) = x_*$; $w(t_*) = w_*$ *respectivamente. Entonces*

$$\|x(t) - w(t)\|^2 \leq \beta_{\#}(t, \delta, \xi) \tag{3.1}$$

para $t_* \leq t \leq t_* + \delta$.

Demostración: vamos a probarlo por reducción al absurdo.
Sea $\tau \in [t_*, t_* + \delta]$ tal que

$$\|x(\tau) - w(\tau)\|^2 > \beta_{\#}(\tau, \delta, \xi) \tag{3.2}$$

Usando (2.15) tenemos

$$\|x(t) - w(t)\| < 1 \text{ para todo } t \in [t_*, \tau] \tag{3.3}$$

En virtud de la definición (2.7) de $\mathcal{D}_0$ y por ser $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_0$ resulta que $(t, x(t)) \in \mathcal{D}_0$, para $t \in [t_*, \Theta]$. Además por (3.3) y recordando la definición (2.8) de $\mathcal{D}_1$, tenemos que $(t, w(t)) \in \mathcal{D}_1$ para $t \in [\tau_*, \tau]$.

Sea $s(t) = x(t) - w(t)$; $\dot{x}(t) = h_*(t)$; $\dot{w}(t) = h^*(t)$. Entonces

$$\frac{d\|s(t)\|^2}{dt} = 2\langle s(t),\ h_*(t) - h^*(t)\rangle \tag{3.4}$$

Para casi todo $t \in [\tau_*, \Theta]$ valen las inclusiones

$$h_*(t) \subset F_1(t, x(t), u_0) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{co}\{f(t, x(t), u_0, v) : \ v \in Q\}$$
$$h_*(t) \subset F_2(t, w(t), v_0) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{co}\{f(t, w(t), u, v_0) : \ u \in P\}$$

Para todo vector s y cualquier conjunto compacto $\mathcal{H}$ valen las siguientes igualdades

$$\max_{h \in \mathcal{H}} \langle s, h\rangle = \max_{h \in \text{ co } \mathcal{H}} \langle s, h\rangle; \quad \min_{h \in \mathcal{H}} \langle s, h\rangle = \min_{h \in \text{ co } \mathcal{H}} \langle s, h\rangle$$

Llamando

$$\begin{cases} \Psi_1(t, x, s, u) \stackrel{\triangle}{=} \max\limits_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v)\rangle \\ \Psi_2(t, x, s, v) \stackrel{\triangle}{=} \min\limits_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v)\rangle \end{cases} \tag{3.5}$$

podemos establecer

$$\begin{cases} \langle s(t), h_*(t)\rangle \leq \Psi_1(t, x(t), s(t), u_0) \\ \langle s(t), h^*(t)\rangle \geq \Psi_2(t, w(t), s(t), v_0) \end{cases} \tag{3.6}$$

Como $(t, x(t))$ y $(t, w(t)) \in \mathcal{D}_1$ para $t \in [t_*, \tau]$, usando (2.10) y (3.3) tenemos

$$\|s(t)\| < \|s(t_*)\| + 2\Lambda(t - t_*) < 2\Lambda\delta + 1$$

$$\|x(t) - x_*\| \leq \Lambda\delta;\ \|s(t) - s(t_*)\| \leq 2\Lambda\delta$$

para $t_* \leq t \leq \tau$.

En virtud de (2.11) podemos escribir

$$\begin{aligned}\Psi_1(t, x(t), s(t), u_0) &\leq \Psi_1(t_*, x_*, s(t_*), u_0) + \|s(t)\|[\lambda\|x(t) - x_*\| + \xi(\delta)] \\ &+ \Lambda\|s(t) - s(t_*)\| \leq \Psi_1(t_*, x_*, s(t_*), u_0) + \frac{\alpha(\delta)}{2}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Análogamente para Ψ_2

$$\begin{aligned}\Psi_2(t, w(t), s(t), v_0) &\geq \Psi_2(t, x(t), s(t), v_0) - \lambda\|s(t)\|^2 \\ &\geq \Psi_2(t_*, x_*, s(t_*), v_0) - \lambda\|s(t)\|^2 - \frac{\alpha(\delta)}{2}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Entonces, usando las cotas

$$\|s_*(t)\| = \|x_* - w_*\| \leq \sqrt{\beta_{\#}(t_*, \delta, \xi)} < 1$$

$$\|s^* - s(t_*)\| = \|s^* - (x_* - w_*)\| \leq \xi$$

$$\|x^* - x_*\| \leq \xi$$

llegamos a

$$\Psi_1(t_*, x_*, s(t_*), u_0) \leq \Psi(t_*, x^*, s^*, u_0) + (\lambda + \Lambda)\xi$$

$$\Psi_2(t_*, x_*, s(t_*), v_0) \geq \Psi(t_*, x^*, s^*, v_0) + (\lambda - \Lambda)\xi$$

Por las acotaciones (3.7) y (3.8) y la definición (2.12) de $\alpha_{\#}$ tenemos

$$\Psi_1(t, x(t), s(t), u_0) \leq \Psi(t_*, x^*, s^*, u_0) + 1/2\alpha_{\#}(\delta, \xi)$$

$$\Psi_2(t, w(t), s(t), v_0) \geq \Psi(t_*, x^*, s^*, v_0) - \lambda\|s(t)\|^2 - 1/2\alpha_{\#}(\delta, \xi)$$

En virtud de la condición de "punto de ensilladura" resulta

$$\Psi_1(t_*, x^*, s^*, u_0) = \Psi_2(t_*, x^*, s^*, v_0) \overset{\triangle}{=} \Psi$$

lo que nos permite acotar del siguiente modo

$$\langle s(t), h_*(t)\rangle \leq \Psi + \frac{\alpha_{\#}(\delta, \xi)}{2}$$

$$\langle s(t), h_*(t)\rangle \geq \Psi - \frac{\alpha_{\#}(\delta, \xi)}{2} - \lambda\|s(t)\|^2$$

para casi todo $t \in [t_*, \delta]$.

Recordando (3.4) tenemos

$$\frac{d\|s(t)\|^2}{dt} \leq 2\lambda\|s(t)\|^2 + 2\alpha_{\#}(\delta,\xi) \tag{3.9}$$

e integrando ambos miembros

$$\|s(\tau)\|^2 \leq \|s(t_*)\|^2 \; e^{2\lambda(\tau-t_*)} + \left[e^{2\lambda(\tau-t_*)} - 1\right] \frac{\alpha_{\#}(\delta,\xi)}{\lambda} \tag{3.10}$$

Como por hipótesis es $\|s(t_*)\|^2 \leq \beta_{\#}(t_*,\delta,\xi)$ la inecuación (3.10) se puede escribir

$$\begin{aligned}\|s(t)\|^2 &\leq \beta_{\#}(t_*,\delta,\xi) \; e^{2\lambda(\tau-t_*)} + \left[e^{2\lambda(\tau-t_*)} - 1\right] \frac{\alpha_{\#}(\delta,\xi)}{\lambda} \\ &= \left[e^{2\lambda(t_*-t_0)} - 1\right] \frac{\alpha_{\#}(\delta,\xi)}{\lambda} \\ &= \beta_{\#}(\tau,\delta,\xi)\end{aligned}$$

Esto es

$$\|s(\tau)\|^2 = \|x(\tau) - w(\tau)\|^2 \leq \beta_{\#}(\tau,\delta,\xi)$$

que contradice la hipótesis (3.2) **l.q.q.d**

4. EJEMPLO.

Sea el sistema controlado descripto por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),u,v(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $f : T \times I\!R^n \times P \times Q \to I\!R^n$; $u(t) \in P \subset I\!R^p$; $v(t) \in Q \subset I\!R^q$ y se cumplen las hipótesis del teorema de estimación.

Sea un control paso-a-paso dado por

$$u(t) = U(\tau_i, x_*, (\tau_i), w(\tau_i)) \qquad \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}; \; (i = 0,1,2,\ldots,k) \tag{4.2}$$

La función $U : T \times I\!R^n \times I\!R^n \to P$ y la partición $\Delta = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1, \ldots, < \tau_{k+1} = \Theta\}$ son elegidas por el primer jugador. Supongamos que el primer jugador mide los estados $x(\tau_i)$ con cierta imprecisión y el vector $x_*(\tau_i)$ es un resultado de este error. El error de medición está acotado por

$$\|x_*(\tau_i) - x(\tau_i)\| \leq \xi \qquad (i = 0,1,2,\ldots,k) \tag{4.3}$$

Según (4.2), la elección del control $u(t)$ depende también de $w(\tau_i)$ que es la posición de fase de la guía al tiempo $t = \tau_i$.

Sean las funciones

$$U^0 : T \times I\!R^n \times I\!R^n \to P; \; V_* : T \times I\!R^n \times I\!R^n \to Q \tag{4.5}$$

tales que

$$\begin{cases} \max\limits_{v \in Q} \langle x - w, f(t, x, U^0(t, x, w), v) \rangle = \\ \qquad = \min\limits_{u \in P} \max\limits_{v \in Q} \langle x - w, f(t, x, u, v) \rangle \\ \min\limits_{u \in P} \langle x - w, f(t, x, u, V_*(t, x, w)) \rangle = \\ \qquad = \max\limits_{v \in Q} \min\limits_{u \in P} \langle x - w, f(t, x, u, v) \rangle \end{cases} \tag{4.5}$$

Supongamos que el punto inicial (t_0, x_0) está en un conjunto cerrado W y elijamos una partición Δ de $[t_0, \Theta]$. En el instante inicial $t_0 = \tau_0$, el primer jugador efectúa una medición imprecisa de $x_0 = x(t_0)$. Sea $x_*(\tau_0)$ el resultado de esa medición. Sea $w(\tau_0) \in I\!R^n$ tal que

$$\|x_*(\tau_0) - w(\tau_0)\| = \min\{\|x_*(\tau_0) - w\| : \; w \in W(t_0)\}$$

donde $W(t_0) = \{w \in I\!R^n : (t_0, w) \in W\}$.

En el primer intervalo $[\tau_0, \tau_1]$ elegimos un control constante para el primer jugador $u^0(t) = U^0(\tau_0, x_*(\tau_0), w(\tau_0))$. Este control, acoplado a un cierto control medible para el segundo jugador, genera un movimiento que satisface

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u^0(t), v(t)) \\ x(t_0) = x_0 \qquad\qquad \tau_0 \le t \le \tau_1 \end{cases} \tag{4.6}$$

También elegimos en ese primer intervalo el control de guía constante $V_*^0 = v_*(\tau_0, x_*(\tau_0), w(\tau_0))$ y consideramos la equación diferencial

$$\dot{w}(t) = \mathcal{F}_2(t, w(t), v_*^0)$$

Como $(\tau_0, w(\tau_0)) \in W$, por la estabilidad del conjunto W, existe una solución tal que

$$(\tau_1, w(\tau_1)) \in W \tag{4.7}$$

o bién

$$\{(t, w(t)) : t_0 \le t \le \tau_1\} \cap M \ne \emptyset \tag{4.8}$$

donde M es un conjunto cerrado que denota el "blanco".

Eligiendo de manera análoga la construcción de los siguientes subintervalos temporales, tenemos asegurado el seguimiento mutuo del sistema controlado y la guía.

BIBLIOGRAFIA.

[1] N.N. Krasovskii y A.I. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, Springer Verlag, New York, Inc., (1988).

[2] F.H. Clarke y P.D. Loewen, *The Value Function in Optimal Control: Sensitivity, Controllability and Time-Optimality*, SIAM J. Control and Optimization, 24, N° 2, (1986).

VERA W. DE SPINADEL
Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires

Recibido en julio de 1992.
Versión modificada en diciembre de 1993.