Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 39, 1995.

APROXIMACIÓN ASINTÓTICA DE FUNCIONALES ANALÍTICOS

RICARDO ESTRADA

ABSTRACT. Using the theory of distributional asymptotic expansions and the techniques of complex analysis, we obtain the asymptotic approximation of an important class of analytic functionals defined on a complex region.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de distribuciones y el análisis asintótico son dos útiles ramas de la matemática aplicada, ambas con una larga y rica historia. Sin embargo, la íntima relación entre distribuciones y expansiones asintóticas fue estudiada en detalle tan solo en años recientes [1,2,3,4,6,10,11,12,13,16,17,19,20,21]. El estudio de esta interacción ha producido interesantes resultados tanto en el análisis local y global de las distribuciones [13,20] así como en la formulación de problemas del análisis asintótico [11,16,21] y en su aplicación en campos como la mecánica cuántica [9], la teoría de números [8], la teoría de operadores singulares [2] o la mecánica clásica [4].

El propósito de este artículo es presentar la expansión asintótica de ciertos parientes de las distribuciones, a saber, ciertos funcionales analíticos definidos en una región compleja.

Usando los métodos de la expansión asintótica de distribuciones y el teorema de Cauchy, se obtienen de una manera sencilla las aproximaciones de punto extremo y la de descenso máximo para estos funcionales analíticos. Esto da, al evaluar, los métodos correspondientes para la aproximación asintótica de integrales consideradas en los textos de análisis asintótico [5,7,14].

El plan del artículo es el siguiente. En la segunda sección se recuerdan algunos resultados de la expansión asintótica de distribuciones que serán necesarios en este estudio. En la tercera sección se definen los funcionales analíticos y se dan sus propiedades básicas. Las secciones cuarta y quinta constituyen el corazón del trabajo: en ellas se obtienen las aproximaciones de punto extremo y de descenso máximo.

2. EXPANSIÓN ASINTÓTICA DE DISTRIBUCIONES

En esta sección damos los resultados de la teoría de la expansión asintótica de funciones generalizadas que necesitaremos. Para los detalles ver [11,12,13].

Usamos la notación usual para los espacios de distribuciones [15,18], a saber,

(1) $\mathcal{D}$ es el espacio de funciones *suaves*, i.e. de clase C^∞, de soporte compacto. Una red $\{\phi_\sigma\}$ de $\mathcal{D}$ converge a 0 en $\mathcal{D}$ si existe un compacto fijo K y σ_0 tal que $\sup \phi_\sigma \subseteq K$ si $\sigma \geq \sigma_0$ y tal que $\{\phi_\sigma\}$ y todas sus derivadas converjan a 0 uniformemente en K.

(2) $\mathcal{E}$ es el subespacio de funciones suaves en todo $\mathbb{R}$, i.e. $C^\infty(\mathbb{R})$, con la topología de la convergencia uniforme de todas las derivadas sobre compactos. Su dual es $\mathcal{E}'$, el espacio de distribuciones de soporte compacto.

(3) $\mathcal{S}$ es el espacio de funciones de prueba que satisfacen $\lim_{|x|\to\infty} x^k \phi^{(j)}(x) = 0$ para todos los $k, j \in \mathbb{N}$. Su dual es $\mathcal{S}'$, el espacio de distribuciones temperadas.

Si f es una función generalizada en una variable que decae en infinito rápidamente (en un sentido que precisaremos más adelante), entonces f satisface la *expansión asintótica de momentos*

$$f(\lambda x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n!\lambda^{n+1}} \ , \text{ cuando } \lambda \to \infty \ , \tag{2.1}$$

donde los μ_n son los momentos de f,

$$\mu_n = < f(x), x^n > . \tag{2.2}$$

La interpretación de (2.1) es en el sentido distribucional, es decir, significa que si ϕ es cualquier función de prueba, entonces

$$< f(\lambda x), \phi(x) > = \sum_{n=0}^{N} \frac{\mu_n \phi^{(n)}(0)}{n!\lambda^{n+1}} + O\Big(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\Big) \ , \tag{2.3}$$

donde usamos el símbolo O grande de Landau. Recuérdese que la notación $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to x_0$ significa que $f(x)/g(x)$ es acotada en las vecindades de x_0. De manera similar, $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_0$ significa que $f(x)/g(x)$ tiende a cero cuando $x \to x_0$.

La expansion asintótica de momentos no vale en los espacios $\mathcal{D}'$ o $\mathcal{S}'$, pero sí vale en $\mathcal{E}'$ así como en los siguientes espacios [11,13]:

(1) $\mathcal{P}'$, donde $\phi \in \mathcal{P}$ si $\phi^{(j)}(x) = O(e^{\gamma|x|})$ cuando $|x| \to \infty$ para $j \in \mathbb{N}$ y $\gamma > 0$.

(2) $\mathcal{O}'_M$, donde $\phi \in \mathcal{O}_M$ si $\phi^{(j)}(x) = O(|x|^{k_j})$ cuando $|x| \to \infty$ para algunos $k_j \in \mathbb{R}$.

(3) $\mathcal{O}'_C$, donde $\mathcal{O}_C$ es el subespacio de $\mathcal{O}_M$ donde todos los k_j se pueden tomar iguales.

(4) $\mathcal{K}'$, donde $\mathcal{K}$ es el subespacio de $\mathcal{O}_M$ donde los k_j se pueden tomar como $k_j = q - j$ para algún $q \in \mathbb{R}$.

Es interesante notar que aunque la expansión (2.1) vale para núcleos de la forma $f(\lambda x)$, cuando $\lambda \to \infty$, muchas veces un simple cambio de variable, en el sentido de las distribuciones, permite la expansión de núcleos de la forma $F(\lambda, x)$ cuando $\lambda \to \infty$.

Por ejemplo, si consideramos la función $e^{-x^2} \in \mathcal{P}'$ la fórmula (2.1) toma la forma

$$e^{-\lambda x^2} \sim \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2n)}(x)}{4^n n! \lambda^{n+1/2}} . \tag{2.3}$$

Si ahora quisieramos la aproximación asintótica de la integral

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda k(x)} \phi(x) dx , \qquad \lambda \to \infty , \tag{2.4}$$

donde $\phi \in \mathcal{D}$ y $k \in \mathcal{E}$, podríamos proceder de la siguiente manera. Sea x_0 un mínimo local de $k(x)$ que supondremos no degenerado (i.e. $k''(x_0) > 0$). Entonces, localmente,

$$k(x) = k(x_0) + \psi(x)^2 , \tag{2.5}$$

donde $\psi(x_0) = 0$ y donde $\psi'(x) > 0$. Así, si U es un vecindario de x_0 que no contiene ningún otro mínimo de $k(x)$ entonces en $\mathcal{D}(U)$ valdrá

$$e^{-\lambda k(x)} = e^{-k(x_0)} e^{-\lambda \psi(x)^2} \sim e^{-\lambda k(x_0)} \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2n)}(\psi(x))}{4^n n! \lambda^{n+1/2}} . \tag{2.6}$$

En particular, como

$$\delta(\psi(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\psi'(x_0)} = \frac{\sqrt{2}\, \delta(x - x_0)}{\sqrt{k''(x_0)}} , \tag{2.7}$$

entonces

$$e^{-\lambda k(x)} = e^{-\lambda k(x_0)} \Big[\Big(\frac{2\pi}{\lambda k''(x_0)} \Big)^{1/2} \delta(x - x_0) + O(\lambda^{-3/2}) \Big] , \tag{2.8}$$

la versión distribucional de la fórmula de Laplace [5,7,14]

$$I(\lambda) = e^{-\lambda k(x_0)} \Big[\Big(\frac{2\pi}{\lambda k''(x_0)} \Big)^{1/2} \phi(x_0) + O(\lambda^{-3/2}) \Big] \tag{2.9}$$

válida si $\phi \in \mathcal{D}(U)$. Naturalmente, la expansión de $I(\lambda)$ en el caso general se obtiene usando una partición de la unidad y (2.9).

3. EL ESPACIO $\mathcal{H}'(\Omega)$ DE FUNCIONALES ANALÍTICOS

Sea Ω una región del plano complejo $\mathbb{C}$. El espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ consiste de las funciones holomorfas en Ω, equipado con la topología de la convergencia uniforme en compactos de Ω.

Los funcionales analíticos sobre Ω son los elementos del espacio dual $\mathcal{H}'(\Omega)$, es decir, funcionales lineales y continuos $f : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$. Al igual que con las distribuciones, la evaluación de un funcional analítico $f \in \mathcal{H}'(\Omega)$ en una función analítica $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ se denota por $< f, g >$ o bien por $< f(z), g(z) >$.

Los funcionales analíticos más sencillos son las funciones delta de Dirac y sus derivadas, $\delta^{(k)}(z - z_0)$, $z_0 \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, definidas de la manera usual en distribuciones, a saber,

$$< \delta^{(k)}(z - z_0), g(z) > = (-1)^k g(z_0) , \qquad g \in \mathcal{H}(\Omega). \tag{3.1}$$

Más generalmente, series del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^{(n)}(z - z_0) \tag{3.2}$$

pertenecen a $\mathcal{H}'(\Omega)$ siempre y cuando $a_n = O(r^n/n!)$, $n \to \infty$, para algún r menor que la distancia de z_0 a la frontera de Ω.

Mientras que en la teoría de distribuciones las funciones delta de Dirac $\delta^{(k)}(x - x_0)$ tienen soporte en el conjunto unitario $\{x_0\}$, el resultado correspondiente no vale para las funciones analíticas $\delta^{(k)}(z - z_0)$. En realidad, no existe una noción de soporte en el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$: los elementos de $\mathcal{H}(\Omega)$ son funciones analíticas y así su comportamiento en cualquier disco, por pequeño que sea, las determina completamente. En consecuencia, tampoco existe noción de soporte en $\mathcal{H}'(\Omega)$. Por ejemplo, se puede pensar que $\delta(z - z_0)$ está concentrada en $\{z_0\}$, pero la fórmula

$$\delta(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^n \delta^{(n)}(z - z_1)}{n!} , \tag{3.3}$$

válida para z_1 cercano a z_0, muestra que $\delta(z - z_0)$ también se puede pensar como concentrado en z_1. Más aún, si C es una curva cerrada en Ω que da vuelta a z_0 una vez, en la dirección positiva, entonces se tiene

$$\delta(z - z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\delta(z - \zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta . \tag{3.4}$$

Una clase particularmente interesante de funcionales analíticos está formada por los funcionales $I(h; C)$, definidos como

$$< I(h; C), g > = \int_C h(z) g(z) dz , \tag{3.5}$$

donde h es analítica en Ω y donde C es una curva orientada en Ω. Nótese que el funcional $I(h; C)$ depende de C tan solo a través de su clase de homología, módulo Ω. En particular, si C_1 y C_2 son homotópicas, módulo Ω, entonces $I(h; C_1) = I(h; C_2)$. Esta propiedad es muy útil en el análisis asintótico.

Naturalmente los $I(h; C)$ también están definidas si C es una unión de curvas orientadas, $C = C_1 + \cdots + C_n$ y valdrá la identidad

$$I(h; C_1 + C_2) = I(h; C_1) + I(h; C_2) . \tag{3.6}$$

Si C no es compacta en Ω sino que se acerca a la frontera $\partial\Omega$ en alguno de sus extremos entonces $I(h; C)$ no es un elemento de $\mathcal{H}'(\Omega)$. Sin embargo, el funcional $I(h; C)$ podrá evaluarse en ciertos subespacios de $\mathcal{H}(\Omega)$. Por ejemplo, si $\Omega = \mathbb{C}$ el funcional $I(1, (-\infty, \infty))$ dado por

$$< I(1, (-\infty, \infty)), g > = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz , \tag{3.7}$$

está bien definido en el espacio $X = \{g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : g(x + iy) = O(x^2),\ x \to \infty,\ |y| < 1\}$.

Nuestro interés es la aproximación asintótica de funcionales del tipo $I(e^{\lambda f(z)}; C)$ cuando $\lambda \to \infty$.

4. LA FÓRMULA DE PUNTO EXTREMO

En esta sección iniciamos el estudio del desarrollo asintótico de funcionales analíticos del tipo

$$I(e^{\lambda f(z)}; C) \ , \tag{4.1}$$

cuando $\lambda \to \infty$. De manera equivalente, buscamos el desarrollo asintótico de la integral

$$\int_C e^{\lambda f(z)} g(z) dz \ , \qquad \lambda \to \infty \ , \tag{4.2}$$

para $g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Iniciaremos el análisis suponiendo λ real y positivo. Más adelante extenderemos los resultados al caso en que λ sea complejo y $|\lambda| \to +\infty$.

Es conveniente comenzar con un ejemplo, que orientará el estudio.

Ejemplo. Considérese la expansión del funcional $I(e^{\lambda z}; C)$, cuando $\lambda \to \infty$, donde $C = C_{ab}$ es una curva de $z = a$ a $z = b$ en la región *convexa* Ω.

Supóngase primero que $\Re e\, a < \Re e\, b$. Entonces la curva C se puede deformar en Ω a una nueva curva $C' = C_1 \cup C_2$ consistente de una parte C_1 donde $\Re e\, \zeta \le m < \Re e\, b$, $\zeta \in C_1$, y de un segmento horizontal C_2 del punto $b - \delta$ a b, para algún $\delta > 0$.

Entonces

$$I(e^{\lambda z}; C) = I(e^{\lambda z}; C_1) + I(e^{\lambda z}; C_2) \ , \tag{4.3}$$

pero

$$I(e^{\lambda z}; C_1) = O(e^{\lambda m}) \ , \qquad \lambda \to \infty \ , \tag{4.4}$$

en tanto que

$$< I(e^{\lambda z}; C_2), g(z) > = \int_{\Re e\, b - \delta}^{\Re e\, b} e^{\lambda(t + i\Im m\, b)} g(t + i\Im m\, b) dt \sim e^{\lambda b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n g^{(n)}(b)}{\lambda^{n+1}} \ , \tag{4.5}$$

ya que según la fórmula de Laplace (2.8)

$$H(t - \alpha) H(\beta - t) e^{\lambda t} \sim e^{\lambda \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(t - \beta)}{\lambda^{n+1}} \ , \qquad \lambda \to \infty \ . \tag{4.6}$$

Resumiendo, si $\Re e\, a < \Re e\, b$ entonces

$$I(e^{\lambda z}; C) \sim e^{\lambda b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(t - \beta)}{\lambda^{n+1}} \ , \qquad \lambda \to \infty \ . \tag{4.7}$$

El caso $\Re e\, a > \Re e\, b$ se reduce a éste al observar que $I(e^{\lambda z}; C) = -I(e^{\lambda z}; -C)$, de modo que

$$I(e^{\lambda z}; C) \sim -e^{\lambda a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(z - a)}{\lambda^{n+1}} \ , \qquad \lambda \to \infty \ . \tag{4.8}$$

Finalmente, si $\Re e\, a = \Re e\, b$ podemos deformar C a una curva $C' = C_{ad} \cup C_{db}$ con $\Re e\, d < \Re e\, b$. Así, usando (4.7) y (4.8) se obtiene

$$I(e^{\lambda z}; C) \sim e^{\lambda b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(z - b)}{\lambda^{n+1}} - e^{\lambda a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(z - a)}{\lambda^{n+1}} \ . \qquad \blacksquare \tag{4.9}$$

En el ejemplo la región Ω se asumió convexa. En realidad, lo que cuenta para la validez de (4.7), cuando $\Re e\, a < \Re e\, b$, es que el contorno C se puede deformar a uno de la forma $C_1 \cup C_2$ con $\Re e\, \xi \leq \Re e\, b$ si $\xi \in C_1$ y con C_2 un segmento horizontal cuyo extremo derecho sea b. Como veremos, el análisis para el funcional $I(e^{\lambda f(z)}; C)$ es similar si la curva C puede deformarse a una donde $\Re e\, f(z)$ tenga un mínimo global en alguno de los extremos. Pero antes de considerar esa situación, veamos como las fórmulas (4.7), (4.8) y (4.9) pueden no valer si Ω no es convexa.

Ejemplo. Considérese la región $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x\}$, donde $x > 0$. Sea C una curva de -1 a 0 formada por una curva de -1 a $x+1$ en el semiplano superior y una curva de $x+1$ a 0 en el semiplano inferior.

Así, si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, el cálculo de residuos da

$$\int_C e^{\lambda z} g(z) dz = 2\pi i \mathcal{R}es_{z=1}(e^{\lambda z} g(z)) + \int_{-1}^{0} e^{\lambda t} g(t) dt \ , \tag{4.10}$$

de modo que si la parte singular de $g(z)$ en $z = x$ tiene la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-x)^n} \ , \tag{4.11}$$

entonces

$$\int_C e^{\lambda z} g(z) dz = 2\pi i e^{\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \int_{-1}^{0} e^{\lambda t} g(t) dt = 2\pi i e^{\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^{n-1}}{(n+1)!} + O(1) \ , \tag{4.12}$$

y se concluye que (4.9) no vale en este caso. ■

La expansión de $I(e^{\lambda f(z)}; C)$ cuando $f'(b) \neq 0$ y cuando el contorno $C = C_{ab}$ puede deformarse a otro contorno C' con $\Re e\, f(\xi) < \Re e\, f(b)$ para $\xi \in C' \setminus \{b\}$, puede obtenerse de (4.7) por un cambio de variables. En efecto, cambios de variables holomorfos en el espacio $\mathcal{H}'(\Omega)$ funcionan de la misma forma que los cambios de variables en distribuciones, a saber, si la aplicación conformal $\omega = T(z)$ es una biyección de Ω a la región Λ y si $T \in \mathcal{H}'(\Lambda)$ entonces el funcional $T(F(z)) \in \mathcal{H}'(\Omega)$ se define como

$$< T(F(z)), g(z) > = < T(\omega), g(F^{-1}(\omega)) \frac{dz}{d\omega} > \ . \tag{4.13}$$

Notemos en particular las fórmulas

$$\delta(F(z)) = \frac{\delta(z-z_0)}{F'(z_0)} \ , \tag{4.14}$$

$$\delta'(F(z)) = \frac{\delta'(z-z_0)}{F'(z_0)} + \frac{F''(z_0)\delta(z-z_0)}{(F'(z_0))^2} \ , \tag{4.15}$$

válidas si $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) \neq 0$.

Volviendo a $I(e^{\lambda f(z)}; C)$, podemos proceder como sigue. Sea Δ un pequeño disco centrado en $f(b)$ tal que la aplicación $\omega = f(z)$ define una biyección entre cierto vecindario Ω_1 de b y el disco Δ. Luego deformamos C a un nuevo contorno $C_1 \cup C_2$ tal que $\Re e\, (\xi) \leq m < \Re e\, f(b)$ si $\xi \in C_1$ y donde C_2 es un contorno contenido en Δ. Entonces

$$I(e^{\lambda f(z)}; C) = O(e^{\lambda m}) \ , \tag{4.16}$$

mientras que

$$< I(e^{\lambda f(z)}; C_2), g(z) > = < I(e^{\lambda\omega}; f(C_2)), g(f^{-1}(\omega))\frac{dz}{d\omega} >$$

$$\sim e^{\lambda f(b)} \sum_{n=0}^{\infty} < \delta^{(n)}(\omega - f(b)), g(f^{-1}(\omega))\frac{dz}{d\omega} > \lambda^{-n-1}$$

$$\sim e^{\lambda f(b)} \sum_{n=0}^{\infty} < \delta^{(n)}(f(z) - f(b)), g(z) > \lambda^{-n-1} \; .$$

Resumiendo.

Teorema. *Sea f holomorfa en la región Ω y sea $C = C_{ab}$ una curva en Ω con $f'(b) \neq 0$ y tal que se puede deformar en Ω a otra curva C' con $\Re e\, f(\xi) < \Re e\, f(b)$ para $\xi \in C' \setminus \{b\}$. Entonces*

$$I(e^{\lambda z}; C) \sim e^{\lambda f(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(f(z) - f(b))}{\lambda^{n+1}} \; , \; \textit{cuando } \lambda \to \infty \; , \tag{4.14}$$

en el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$. ■

5. EXPANSIÓN DE PUNTOS DE ENSILLADURA

En esta sección consideramos la expansión del funcional analítico $I(e^{\lambda f(z)}, C)$ cuando la contribución principal no proviene de los extremos de C. La expansión que obtendremos se conoce como *expansión de puntos de ensilladura* y el procedimiento que conduce a ella se conoce como *método de descenso máximo.*

Los puntos $z_0 \in \Omega$ donde $f'(z_0) = 0$ se llaman *puntos de ensilladura.* El gráfico de $|e^{\lambda f(z)}| = e^{\lambda \Re e\, f(z)}$ como función de $x = \Re e\, z$ y $y = \Im m\, z$ se llama la *superficie de relieve.* Los puntos de ensilladura son puntos de ensilladura, en el sentido usual, de la superficie de relieve.

Las curvas en las que $u = \Re e\, f$ es constante se llaman *curvas de nivel.* Las curvas de nivel son las líneas de contorno de la superficie de relieve: en ellas la altura $|e^{\lambda f(z)}|$ de la superficie de relieve se mantiene constante en tanto que la fase de $e^{\lambda f(z)}$ varía tan rápido como es posible. Por otra parte, las curvas en las que $v = \Im m\, f$ es constante se llaman *curvas de descenso máximo*; ellas son las líneas gradientes de la superficie de relieve: en ellas $|e^{\lambda f(z)}|$ cambia tan rápido como es posible.

Un punto de ensilladura se dice de orden m si $f'(z_0) = \ldots = f^{(m)}(z_0) = 0$ pero $f^{(m+1)}(z_0) \neq 0$. En un punto de ensilladura de orden m, $m+1$ curvas de nivel se encuentran y determinan ángulos iguales que son bisecados por $m+1$ curvas de nivel. Estas $m+1$ curvas de nivel dividen la superficie de relieve en $m+1$ valles y $m+1$ colinas.

Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo. Considérese la expansión del funcional analítico $I(e^{\lambda z^2}; C)$ donde C es una curva del punto $z = a$ al punto $z = b$ en la región convexa Ω. Supondremos que el punto de ensilladura $z = 0$ pertenece a Ω.

Las curvas de nivel a través de $z = 0$ son $x = y$ y $x = -y$, que dividen el plano en dos colinas ($-\pi/4 < arg\, z < \pi/4$ y $3\pi/4 < arg\, z < 5\pi/4$) y dos valles ($\pi/4 < arg\, z < 3\pi/4$ y $5\pi/4 < arg\, z < 7\pi/4$). Las líneas de descenso máximo por $z = 0$ son las líneas

$y = 0$ y $x = 0$. En $y = 0$ la función $|e^{\lambda z^2}| = e^{\lambda(x^2-y^2)}$ tiene un mínimo en $z = 0$ en tanto que en $x = 0$ la función $|e^{\lambda z^2}|$ tiene un máximo en $z = 0$.

La expansión de $I(e^{\lambda z^2}; C)$ se obtiene de la fórmula del punto extremo (4.14) si a o b pertenecen a una colina o bien si ambos están en el mismo valle. Sin embargo, (4.14) no puede aplicarse si $z = a$ y $z = b$ están en valles diferentes pues $\Re e\, a^2$ y $\Re e\, b^2$ son ambos negativos pero en cualquier curva C de a a b hay puntos ξ con $\Re e\, \xi^2 \geq 0$. Para obtener el desarrollo de $I(e^{\lambda z^2}; C)$ en este caso deformamos C a una poligonal $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ donde C_1 es un segmento horizontal de a a $i\Im m\, a$, C_2 es una línea de descenso máximo de $i\Im m\, a$ a $i\Im m\, b$ y C_3 es un segmento horizontal de $i\Im m\, b$ a b. Dado que

$$I(e^{\lambda z^2}; C_j) = O(e^{-\lambda m}) \;, \qquad j = 1, 3 \;, \tag{5.1}$$

donde $-m = \max\{-(\Im m\, a)^2, -(\Im m\, b)^2\} < 0$, bastar obtener la expansión de $I(e^{\lambda z^2}; C)$. Pero

$$\begin{aligned} < I(e^{\lambda z^2}; C_2), g(z) > &= \int_{C_2} e^{\lambda z^2} g(z) dz \\ &= i \int_{\Im m\, a}^{\Im m\, b} e^{-\lambda t^2} g(i\,t) dt \\ &\sim \pm i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} g(i\,t) dt \\ &\sim \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2})\, i^{\,2n+1} g^{(2n)}(0)}{(2n)!\, \lambda^{\frac{2n+1}{2}}} \;, \end{aligned}$$

y así

$$I(e^{\lambda t^2}; C) \sim \sigma i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{2n+1}{2}) \delta^{(2n)}(z)}{(2n)!\, \lambda^{\frac{2n+1}{2}}} \;, \tag{5.2}$$

donde $\sigma = sgn(\Im m\, b - \Im m\, a) = \pm 1$. ■

El análisis en las vecindades de cualquier punto de ensilladura de primer orden es muy similar a este ejemplo. En realidad, un simple cambio de variables en (5.2) da la expansión en este caso.

En efecto, supóngase que $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) \neq 0$, donde $f = u + iv$ es analítica en las vecindades de z_0. Entonces, en un pequeño vecindario de $z = z_0$ podemos escribir $f(z) = f(z_0) + \rho(z)^2$, donde ρ es una biyección a un vecindario de $z = 0$. Entonces si C es una curva del punto $z = a$ al punto $z = b$, situados en diferentes valles para $|e^{\lambda f(z)}|$ cerca de $z = z_0$, se tendrá

$$\begin{aligned} I(e^{\lambda f(z)}; C) &= e^{\lambda f(z_0)} I(e^{\lambda \rho(z)^2}; C) \\ &\sim \sigma i e^{\lambda f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{2n+1}{2}) \delta^{(2n)}(z)}{(2n)!\, \lambda^{\frac{2n+1}{2}}} \;, \end{aligned}$$

y escogiendo la rama $\rho(z) = \sqrt{f(z) - f(z_0)}$ de modo que $\sigma = sgn(\Im m(f(b) - f(a))) = 1$, obtenemos

$$I(e^{\lambda f(z)}; C) \sim i e^{\lambda f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{2n+1}{2}) \delta^{(2n)}(\sqrt{f(z) - f(z_0)})}{(2n)!\, \lambda^{\frac{2n+1}{2}}} \;. \tag{5.3}$$

La aproximación de primer orden

$$I(e^{\lambda f(z)};C) \sim e^{\lambda f(z_0)}\sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda f''(z_0)}}\delta(z-z_0) \tag{5.4}$$

es la versión distribucional de la *aproximación de punto de ensilladura*

$$\int_C e^{\lambda f(z)}g(z)dz \sim e^{\lambda f(z_0)}\sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda f''(z_0)}}g(z_0)\ . \tag{5.5}$$

La aproximación asintótica de $I(e^{\lambda f(z)};C)$ en las vecindades de un punto de ensilladura de orden superior puede obtenerse usando los mismos argumentos. Comenzamos con el caso $f(z) = z^k$, donde C es una curva del punto de ensilladura $z = 0$ al punto $z = b$, que supondremos que pertenece a un valle. Obsérvese que en cada valle hay exactamente una raíz de la ecuación $\omega^k = -1$: el rayo con ecuación paramétrica $t\omega$, $t > 0$, es la curva de descenso máximo que lleva al punto de ensilladura en ese valle. Denotaremos ω como $\omega(b)$ cuando queremos indicar que a y b pertenecen al mismo valle.

Para obtener la expansión deformamos C a un contorno consistente en dos partes C_1 y C_2, donde C_1 es un segmento de 0 a ω a lo largo de la curva de descenso máximo y donde C_2 es una curva de ω a b en el valle. Entonces, cuando $\lambda \to \infty$ se tendrá

$$\begin{aligned}\int_C e^{\lambda z^k}dz &= \int_{C_1} e^{\lambda z^k}dz + \int_{C_2} e^{\lambda z^k}dz \\ &\sim \int_{C_1} e^{\lambda z^k}dz \\ &\sim \omega\int_0^1 e^{-\lambda t^k}g(t\omega)dt \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{k})\omega^{n+1}g^{(n)}(0)}{k\,n!\,\lambda^{\frac{n+1}{k}}}\ ,\end{aligned}$$

ya que

$$H(1-t)H(t)e^{-\lambda t^k} \sim H(t)e^{-\lambda t^k} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\frac{n+1}{k})\delta^{(n)}(t)}{k\,n!\,\lambda^{\frac{n+1}{k}}}\ .$$

En resumen,

$$I(e^{\lambda z^k};C) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\frac{n+1}{k})\omega(b)^{n+1}\delta^{(n)}(z)}{k\,n!\,\lambda^{\frac{n+1}{k}}}\ , \tag{5.6}$$

para una curva de $z = 0$ a $z = b$.

El caso de una curva de extremos $z = a$ y $z = b$ situados en valles distintos se sigue de (5.6) como

$$I(e^{\lambda z^k};C) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\frac{n+1}{k})(\omega(b)^{n+1}-\omega(a)^{n+1})\delta^{(n)}(z)}{k\,n!\,\lambda^{\frac{n+1}{k}}}\ . \tag{5.7}$$

En el caso general en el que $z = z_0$ es un punto de ensilladura de orden k para la función $f(z)$, escribimos $f(z) = f(z_0) + \rho(z)^k$ en las vecindades de z_0 para obtener

$$I(e^{\lambda f(z)};C) \sim e^{\lambda f(z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\frac{n+1}{k})(\omega(\rho(b))^{n+1}-\omega(\rho(a))^{n+1})\delta^{(n)}(\rho(z))}{k\,n!\,\lambda^{\frac{n+1}{k}}}\ , \tag{5.8}$$

para el caso de extremos $z = a$ y $z = b$ situados en valles distintos en las vecindades de $z = z_0$.

Hemos así establecido el siguiente

Teorema. *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*y sea* $z_0 \in \Omega$ *un punto de ensilladura de orden* k *de* f. *Sea* Δ *un disco centrado en* z_0 *en el que es posible definir una rama analítica* $\rho(z)$ *de* $(f(z)-f(z_0)^{1/k}$. *Entonces si* C *es una curva en* Δ *con extremos* $z = a$ *y* $z = b$ *situados en valles distintos, se tendrá*

$$I(e^{\lambda f(z)}; C) \sim e^{\lambda f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{n+1}{k})(\omega(\rho(b))^{n+1} - \omega(\rho(a))^{n+1})\delta^{(n)}(\rho(z))}{k\, n!\, \lambda^{\frac{n+1}{k}}}, \tag{5.8}$$

cuando $\lambda \to \infty$. ■

Finalmente consideramos el caso en el que el parámetro λ es complejo y $|\lambda| \to \infty$. Escribimos entonces $\lambda = \xi s$, donde $|\xi| = 1$ y donde $s = |\lambda|$. Debemos entonces considerar el funcional $I(e^{s\xi f(z)}; C)$. La función $\xi f(z)$ tiene los mismos puntos de ensilladura que $f(z)$, pero la constante multiplicativa ξ produce una rotación en el patrón de valles y colinas. Dado que la expansión depende de la localización de los extremos de C con respecto a valles y colinas, la expansión cambia de forma cuando la rotación hace que los extremos crucen las líneas de nivel. Este cambio en la expansión es el llamado *fenómeno de Stokes* en la expansión de funciones analíticas [5,7,13,14].

Ejemplo. Consideremos el desarrollo del funcional $I(e^{\lambda z^2}; [0,1])$ cuando $\lambda \to \infty$, donde [0,1] es el segmento de $z = 0$ a $z = 1$ en el eje real. Escribiendo $\lambda = \xi s$ con $|\xi| = 1$ y $s > 0$, debemos considerar la función ξz^2. Las líneas de nivel cerca del único punto de ensilladura, $z = 0$, son las líneas $arg z = -\frac{1}{2}arg\xi + \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$. Se sigue que siempre y cuando $|arg\xi| < \pi/2$, es decir, siempre y cuando $\Re e\, \lambda > 0$, entonces el extremo $z = 1$ pertenece a una colina y así la fórmula de punto extremo (4.14) es aplicable:

$$\int_0^1 e^{\lambda z^2} g(z) dz \sim e^{\lambda} g(1) , \qquad \Re e\, \lambda > 0. \tag{5.9}$$

Por otra parte, si $\pi/2 < arg\xi < 3\pi/2$, esto es, si $\Re e\, \lambda < 0$, entonces 1 pertenece a un valle y se aplica la aproximación de punto de ensilladura,

$$\int_0^1 e^{\lambda z^2} g(z) dz \sim \sqrt{\frac{-\pi}{4\lambda}} g(0) , \qquad \Re e\, \lambda < 0. \tag{5.10}$$

Los rayos $\lambda = \pm ti$, $t > 0$, son las *líneas de Stokes*: a través de ellas la aproximación de $I(e^{\lambda z^2}; [0,1])$ cambia de $e^{\lambda}\delta(z-1)$ a $\sqrt{\frac{-\pi}{4\lambda}}\delta(z)$. Para obtener la aproximación a lo largo de estos rayos debemos combinar ambas aproximaciones. En efecto, deformamos el segmento $[0,1]$ en una curva $C = C_1 \cup C_2$ donde C_1 es un segmento de la línea de descenso máximo y donde C_2 es un segmento de esta línea al punto $z = 1$. Para C_1 se aplica la aproximación de punto de ensilladura, $I(e^{\lambda z^2}; C_1) \sim \sqrt{\frac{-\pi}{4\lambda}}\delta(t)$, mientras que para C_2 se aplica la aproximación de punto extremo, $I(e^{\lambda z^2}; C_2) \sim e^{\lambda}\delta(z-1)$ y así, como el primer término es dominante,

$$\int_0^1 e^{\lambda z^2} g(z) dz \sim \sqrt{\frac{-\pi}{4\lambda}} g(0) , \qquad \Re e\, \lambda = 0. \tag{5.11}$$

En realidad, podemos combinar ambas aproximaciones y obtener la aproximación uniforme

$$I(e^{\lambda z^2};[0,1]) \sim e^{\lambda}\delta(z-1) + \sqrt{\frac{-\pi}{4\lambda}}\delta(z)\ , \tag{5.12}$$

válida en todo $\mathbb{C}$. ∎

REFERENCIAS

[1] Brüning, J., On the asymptotic expansion of some integrals, *Arch. Math.* **42** (1984), 253–259.

[2] Brüning, J. y Seeley, R., Regular singular asymptotics, *Adv. Math.* **58** (1985), 133–148.

[3] Brychkov, Y.A. y Prudnikov, A.P., *Integral Transforms of Generalized Functions*, Gordon and Breach, New York, 1987.

[4] Caboz, R., Codaccioni, J.P. y Constantinescu, F., Taylor series of the Dirac function on a perturbed surface with applications to Mechanics, *Math. Meth. Appl.Sci.* **7** (1985), 416–425.

[5] De Bruijn, N.G., *Asymptotic Methods in Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1970.

[6] Durbin, P., Asymptotic expansions of Laplace Transforms about the origen using generalized functions, *J.Inst.Math.Appls.* **23** (1978), 182–192.

[7] Erdelyi, A., *Asymptotic Expansions*, Dover, New York, 1956.

[8] Estrada, R., The asymptotic expansion of certain series considered by Ramanujan, *Appl. Anal.* **43** (1992), 191–228.

[9] Estrada, R., Gracia-Bondía, J. y Várilly, J., On asymptotic expansions of twisted products, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 2789–2796.

[10] Estrada, R. y Kanwal, R.P., Moment sequences for a class of distributions, *Complex Variables* **9** (1987), 31–39.

[11] Estrada, R. y Kanwal, R.P., A distributional theory for asymptotic expansion, *Proc. Roy. Soc. London A.* **428** (1990), 399–430.

[12] Estrada, R. y Kanwal, R.P., The asymptotic expansion of some multidimensional generalized functions, *J.Math.Anal.Appls.* **163** (1992), 264–283.

[13] Estrada,R. y Kanwal,R.P.,*Asymptotic Analysis:a distributional approach*, Birkhaüser, Boston, 1993.

[14] Handelsman, R.A. y Bleinstein, N., *Asymptotic Expansions of Integrals*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.

[15] Kanwal, R.P., *Generalized Functions: theory and technique*, Academic Press, New York, 1983.

[16] Mc Clure, J.P. y Wong, R., Generalized Mellin convolutions and their asymptotic expansions, *Can. J. Math.* **36** (1984), 924–960.

[17] Pilipovic, S., Quasiasymptotic expansion and the Laplace transform, *Appl. Anal.* **35** (1990), 247–261.

[18] Schwartz, L., *Théorie des Distributions*, Herman, Paris, 1966.

[19] Stankovic, B., S-asymptotic of distributions, en: *Generalized Functions, Convergence Structures and Their Aplications*, Plenum Press, New York, 1988; 71–72.

[20] Vladimirov, V.S., Drozhinov, Y.N. y Zavialov, B.I., *Multidimensional Tauberian Theorems for Generalized Functions*, Nauka, Moscú, 1986.

[21] Wong, R., *Asymptotic Approximation of Integrals*, Academic Press, New York, 1989.

Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station,TX 77843,U.S.A.

Recibido en octubre de 1994.