

UNA RELACION QUE CARACTERIZA DIVERSOS ESPACIOS DE CONVEXIDAD

Juan Carlos Bressan

ABSTRACT. An "alignment relation" between points of two concurrent segments of a convexity space is defined. Different types of convexity spaces are characterized by certain properties of this alignment relation. Special attention is devoted to the characterization of convexity spaces with visibility conditions (existence of convex components, construction of visibility cells, T-convexity spaces) and with separation properties (Drešević's property or Kakutani's property). The central theorems of this paper generalize previous results of Kołodziejczyk (1985) and Bressan & Toranzos (1992).

1. INTRODUCCION Y DEFINICIONES.

Diremos que $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de convexidad si y sólo si X es un conjunto no vacío y $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ y si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ entonces $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{C}$. En este trabajo $(X, \mathcal{C})$ siempre denotará un espacio de convexidad.

Un conjunto $S \subset X$ se llamará $\mathcal{C}$ -convexo si y sólo si $S \in \mathcal{C}$. La cápsula $\mathcal{C}$ -convexa de un subconjunto S de X se define en la forma usual:

$$\mathcal{C}(S) = \bigcap \left\{ C \in \mathcal{C} \mid S \subset C \right\}.$$

Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$, el conjunto $\mathcal{C}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ se escribirá $\mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Como caso particular, $\mathcal{C}(\{x_1, x_2\})$ se sim-

bolizará $\mathcal{C}(x_1, x_2)$ y se llamará $\mathcal{C}$ -segmento x_1, x_2 . También, si $p \in X$ y $S \subset X$, $\mathcal{C}(\{p\} \cup S)$ se denotará $\mathcal{C}(p \cup S)$.

Consideremos $S \subset X$ y $x \in S$. La $\mathcal{C}$ -estrella de x en S es el conjunto

$$\mathcal{C}\text{-st}(x, S) = \left\{ y \in S \mid \mathcal{C}(x, y) \subset S \right\}.$$

El conjunto S se dirá $\mathcal{C}$ -estrellado con respecto a $x \in S$ si y sólo si $\mathcal{C}\text{-st}(x, S) = S$. El $\mathcal{C}$ -mirador de S es el conjunto

$$\mathcal{C}\text{-mir}(S) = \left\{ x \in S \mid \mathcal{C}\text{-st}(x, S) = S \right\}.$$

S es $\mathcal{C}$ -estrellado si y sólo si es $\mathcal{C}$ -estrellado con respecto a alguno de sus puntos, es decir, si y sólo si $\mathcal{C}\text{-mir}(S) \neq \emptyset$.

Para $S \subset X$ y $x \in S$, definimos la célula de $\mathcal{C}$ -visibilidad de x con respecto a S mediante

$$\mathcal{C}\text{-vis}(x, S) = \left\{ y \in \mathcal{C}\text{-st}(x, S) \mid \mathcal{C}\text{-st}(x, S) \subset \mathcal{C}\text{-st}(y, S) \right\}.$$

La noción de célula de visibilidad fue introducida por Toranzos [10] para la convexidad usual en espacios vectoriales reales. Su generalización a espacios de convexidad se encuentra en [4].

Si $S \subset X$, diremos que M es una componente $\mathcal{C}$ -convexa de S si y sólo si M es un subconjunto $\mathcal{C}$ -convexo maximal de S . En este trabajo, $\mathcal{M}(S)$ siempre denotará la familia de todas las componentes $\mathcal{C}$ -convexas de S . A continuación definiremos diversos tipos de espacios de convexidad.

$(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **DF-convexidad** si y sólo si $\forall S \subset X$,

$$\mathcal{C}(S) = \bigcup \left\{ \mathcal{C}(F) \mid F \subset S \text{ y } \text{card}(F) < \infty \right\}.$$

$(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **JHC-convexidad** si y sólo si para todo $p \in X$ y para todo subconjunto no vacío S de X , se cumple

$$\mathcal{C}(p \cup S) = \bigcup \left\{ \mathcal{C}(p, s) \mid s \in \mathcal{C}(S) \right\}.$$

$(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **JD-convexidad** si y sólo si es un espacio de **JHC-convexidad** y **DF-convexidad**.

$(X, \mathcal{C})$ es un espacio de T_1 -convexidad si y sólo si $\forall x \in X$,
 $\mathcal{C}(x) = \{x\}$.

$(X, \mathcal{C})$ es un *espacio de T-convexidad* si y sólo si $\forall S \subset X$,
 $\mathcal{C}\text{-mir}(S) = \bigcap M(S)$.

En 1967 Toranzos probó esta propiedad en espacios vectoriales reales [9]. En 1976 Bressan, (1.7) VI de [2], la demostró en un contexto axiomático equivalente al de espacios de $\mathbb{T}_1$ JD-convexidad. Los espacios de T-convexidad fueron introducidos en 1985 por Kołodziejczyk [8]. En 1992 Bressan y Toranzos, 3.3 de [4], prueban una relación entre espacios de T-convexidad y células de $\mathcal{C}$ -visibilidad. Las definiciones y notaciones dadas más arriba aparecen en los dos últimos trabajos mencionados.

Seguidamente definiremos los espacios de S-convexidad y una relación de alineación entre puntos de dos $\mathcal{C}$ -segmentos que permitirá caracterizar los espacios de JD-convexidad y de T-convexidad. Los espacios de convexidad de Drežević y de Kakutani, que definiremos más adelante, también se podrán caracterizar mediante la relación antes mencionada.

Diremos que $(X, \mathcal{C})$ es un *espacio de S-convexidad* si y sólo si para todo $S \subset X$ se cumple

$$S \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall \{a, b\} \subset S, \mathcal{C}(a, b) \subset S.$$

Para $\{a, b, c, d\} \subset X$, donde $d \in \mathcal{C}(b, c)$, definimos la relación $\mathcal{R}: \mathcal{C}(a, d) \rightarrow \mathcal{C}(a, b)$ por

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}(c, y),$$

que llamaremos *relación de alineación*, con el punto c , entre los puntos de $\mathcal{C}(a, d)$ y los de $\mathcal{C}(a, b)$. La misma queda unívocamente determinada por los puntos a, b, c, d de X , los cuales pueden no ser distintos pero deben cumplir que $d \in \mathcal{C}(b, c)$. Escribiremos $[a, b, c, d]$ para indicar que se cumple esta condición. Denotaremos la relación anterior mediante $\mathcal{R}[a, b, c, d]$. El dominio y la imagen de esta relación son, respectivamente:

$$\text{Dom } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \left\{ x \in \mathcal{C}(a, d) \mid \exists y \in \mathcal{C}(a, b), x \mathcal{R} y \right\},$$

$$\text{Im } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \left\{ y \in \mathcal{C}(a, b) \mid \exists x \in \mathcal{C}(a, d), x \mathcal{R} y \right\}.$$

En la convexidad usual en espacios vectoriales reales se cumple $\forall [a, b, c, d]$, $\text{Dom } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \mathcal{C}(a, d)$ y $\text{Im } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \mathcal{C}(a, b)$;

es más, si a, b, c no están alineados y $d \neq c$, entonces $\mathcal{R}: \mathcal{C}(a,d) \rightarrow \mathcal{C}(a,b)$ es una función biyectiva.

2. CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS DE **JD**-CONVEXIDAD Y DE **T**-CONVEXIDAD.

Comenzaremos este párrafo dando algunos resultados que se utilizarán en la demostración del teorema 2.5. La siguiente proposición es el teorema 2.2 de [4].

PROPOSICION 2.1: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad y S un subconjunto no vacío de X , entonces

$$\mathcal{C}\text{-mir}(S) = \bigcap \left\{ \mathcal{C}\text{-vis}(x, S) \mid x \in S \right\}.$$

Diremos que una familia de subconjuntos de X es una *cadena* si y sólo si la misma está totalmente ordenada por inclusión. La siguiente equivalencia fue probada por Hammer [7].

TEOREMA 2.2: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad. Entonces $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **DF**-convexidad si y sólo si la unión de toda cadena de conjuntos $\mathcal{C}$ -convexos es un conjunto $\mathcal{C}$ -convexo.

PROPOSICION 2.3: Si $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **S**-convexidad, entonces es un espacio de **DF**-convexidad.

La proposición anterior se prueba mediante la aplicación de las definiciones de espacios de **S**-convexidad y **DF**-convexidad. Su recíproca no es válida, lo cual puede verse usando 4.3 de [4].

Como consecuencia del teorema 2.2 y del lema de Zorn obtenemos:

COROLARIO 2.4: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de **DF**-convexidad, entonces valen las siguientes proposiciones:

- (i) Si $C \subset S \subset X$ y C es $\mathcal{C}$ -convexo, entonces existe M , componente $\mathcal{C}$ -convexa de S , tal que $C \subset M$.
- (ii) Si S es una unión de subconjuntos $\mathcal{C}$ -convexos de X , entonces S es unión de sus componentes $\mathcal{C}$ -convexas.

El teorema que daremos a continuación caracteriza los espacios de **JD**-convexidad utilizando las relaciones $\mathcal{R}[a,b,c,d]$. Además, permite caracterizar dichos espacios mediante la expresión, para ciertos subconjuntos de X , de las células de $\mathcal{C}$ -visibilidad y del $\mathcal{C}$ -mirador como intersección de componentes $\mathcal{C}$ -convexas.

TEOREMA 2.5: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad, entonces son equivalentes:

(i) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **S**-convexidad tal que

$$\forall [a,b,c,d] \quad \text{Dom } \mathcal{R}[a,b,c,d] = \mathcal{C}(a,d).$$

(ii) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **JD**-convexidad.

(iii) Si S es unión de subconjuntos $\mathcal{C}$ -convexos de X , entonces

$$\forall x \in S, \quad \mathcal{C}\text{-vis}(x, S) = \bigcap \left\{ M \in \mathcal{M}(S) \mid x \in M \right\}.$$

(iv) Si S es unión de subconjuntos $\mathcal{C}$ -convexos de X , entonces

$$\mathcal{C}\text{-mir}(S) = \bigcap \mathcal{M}(S).$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos (i). Por 2.3, $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de **DF**-convexidad. Sean $p \in X$, $\emptyset \neq S \subset X$, y

$$\mathcal{C}\text{-join}(p, \mathcal{C}(S)) = \bigcup \left\{ \mathcal{C}(p, s) \mid s \in \mathcal{C}(S) \right\}.$$

Es inmediato que $\{p\} \cup S \subset \mathcal{C}\text{-join}(p, \mathcal{C}(S)) \subset \mathcal{C}(p \cup S)$. Resta probar, únicamente, que $\mathcal{C}\text{-join}(p, \mathcal{C}(S))$ es $\mathcal{C}$ -convexo. Tomemos $\{x_1, x_2\} \subset \mathcal{C}\text{-join}(p, \mathcal{C}(S))$, $x \in \mathcal{C}(x_1, x_2)$. Luego existen s_1 y s_2 elementos de $\mathcal{C}(S)$, tales que $x_1 \in \mathcal{C}(p, s_1)$ y $x_2 \in \mathcal{C}(p, s_2)$. Pero $\text{Dom } \mathcal{R}[x_1, s_2, p, x_2] = \mathcal{C}(x_1, x_2)$; así existe $y \in \mathcal{C}(x_1, s_2)$ tal que $x \in \mathcal{C}(p, y)$. Como $\text{Dom } \mathcal{R}[s_2, s_1, p, x_1] = \mathcal{C}(s_2, x_1)$, existe $z \in \mathcal{C}(s_2, s_1)$ tal que $y \in \mathcal{C}(p, z)$. Así, $x \in \mathcal{C}(p, y) \subset \mathcal{C}(p, z)$, donde $z \in \mathcal{C}(s_1, s_2) \subset \mathcal{C}(S)$. En consecuencia, $x \in \mathcal{C}\text{-join}(p, \mathcal{C}(S))$, resultando este conjunto $\mathcal{C}$ -convexo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supongamos (ii). Sea $x \in S$, donde S es una unión de subconjuntos $\mathcal{C}$ -convexos de X y consideremos la familia

$$\mathcal{M}_x(S) = \left\{ M \in \mathcal{M}(S) \mid x \in M \right\}.$$

Por 2.4 (ii), $\bigcup \mathcal{M}(S) = S$; en consecuencia, $\mathcal{M}_x(S) \neq \emptyset$.

Si $y \in \bigcap \mathcal{M}_x(S)$, entonces $\forall M \in \mathcal{M}_x(S)$, $\mathcal{C}(x, y) \subset M \subset S$, es decir, $y \in \mathcal{C}\text{-st}(x, S)$. Si $z \in \mathcal{C}\text{-st}(x, S)$, entonces $\mathcal{C}(x, z) \subset S$ y, por 2.4 (i), $\exists M \in \mathcal{M}(S)$ tal que $\mathcal{C}(x, z) \subset M$. Evidentemente,

$M \in \mathcal{M}_x(S)$; en consecuencia, $y \in M$, de donde $\mathcal{C}(y, z) \subset M \subset S$, lo que implica que $z \in \mathcal{C}\text{-st}(y, S)$. Luego, $y \in \mathcal{C}\text{-vis}(x, S)$.

Ahora, sea $y \in \mathcal{C}\text{-vis}(x, S)$, es decir, $y \in \mathcal{C}\text{-st}(x, S) \subset \mathcal{C}\text{-st}(y, S)$. Si $M \in \mathcal{M}_x(S)$, entonces $\forall z \in M$, $\mathcal{C}(x, z) \subset M \subset S$. En consecuencia, $\forall z \in M$, $\mathcal{C}(y, z) \subset S$; así, por (ii), $\mathcal{C}(y \cup M) \subset S$. La maximalidad de M implica que $\mathcal{C}(y \cup M) = M$, por lo cual $y \in M$. De esta forma $y \in \bigcap \mathcal{M}_x(S)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Supongamos (iii). Si $S = \emptyset$, entonces (iv) resulta trivial. Para $S \neq \emptyset$ se obtiene (iv) como consecuencia de 2.1.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Supongamos (iv). Sea $A \subset X$ tal que $\forall \{a, b\} \subset A$ $\mathcal{C}(a, b) \subset A$, es decir, $\mathcal{C}\text{-mir}(A) \supseteq A$. De esta forma, A es una unión de subconjuntos $\mathcal{C}$ -convexos de X , y utilizando (iv) obtenemos $A = \mathcal{C}\text{-mir}(A) = \bigcap \mathcal{M}(A) \in \mathcal{C}$. En consecuencia, $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de S -convexidad.

Sea $[a, b, c, d]$, es decir, $\{a, b, c, d\} \subset X$ con $d \in \mathcal{C}(b, c)$. Tomemos

$$S = \bigcup \left\{ \mathcal{C}(c, y) \mid y \in \mathcal{C}(a, b) \right\}.$$

Por 2.3 y 2.4 (i), $\exists M \in \mathcal{M}(S)$ tal que $\mathcal{C}(a, b) \subset M$. Pero, $c \in \mathcal{C}\text{-mir}(S)$ y, por (iv), $\mathcal{C}\text{-mir}(S) = \bigcap \mathcal{M}(S)$, de donde $c \in M$. Así resulta $S = M \in \mathcal{C}$. De esta forma $\mathcal{C}(a, d) \subset S$ y $\forall x \in \mathcal{C}(a, d)$ $\exists y \in \mathcal{C}(a, b)$ tal que $x \in \mathcal{C}(c, y)$, es decir, $x \mathcal{R} y$. En consecuencia, $\text{Dom } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \mathcal{C}(a, d)$.

De la equivalencia entre (ii) y (iv) de 2.5, obtenemos el siguiente corolario, que es el teorema 4.2 de [8].

COROLARIO 2.6: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de $\mathbb{T}_1$ -convexidad. Entonces $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbf{T}$ -convexidad si y sólo si es un espacio de $\mathbf{JD}$ -convexidad.

En 2.6 la condición $\mathbb{T}_1$ se utiliza únicamente para probar que la $\mathbf{JD}$ -convexidad implica la $\mathbf{T}$ -convexidad. En virtud de 4.1 de [4], hay espacios de $\mathbf{T}$ -convexidad que no son $\mathbb{T}_1$. Sin embargo, todo espacio de $\mathbf{T}$ -convexidad deberá cumplir la condición $\mathbb{T}_{1D}$.

Diremos que $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbb{T}_{1D}$ -convexidad si y sólo si

$$\forall x \in X, \forall C \in \mathcal{C} - \{\emptyset\}, \mathcal{C}(x) \subset \{x\} \cup C.$$

PROPOSICION 2.7: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad, entonces son equivalentes:

- (i) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbb{T}_{1D}$ -convexidad.
- (ii) $\forall x \in X, \forall S \in \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}, \mathcal{C}(x) \subset \{x\} \cup \mathcal{C}(S)$.
- (iii) Si $x \in S \subset X$ y $C \subset S$, donde $\emptyset \neq C \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}(x) \subset S$.
- (iv) Si $S \subset X$ y existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \neq C \subset S$, entonces S es unión de subconjuntos $\mathcal{C}$ -convexos.
- (v) $\forall \{x, y\} \subset X, \mathcal{C}(x) \subset \{x\} \cup \mathcal{C}(y)$.

La siguiente caracterización de los espacios de $\mathbf{T}$ -convexidad se demuestra fácilmente a partir de 2.5 y 2.7.

TEOREMA 2.8: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad, entonces son equivalentes:

- (i) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbb{T}_{1D}$ $\mathbf{S}$ -convexidad tal que

$$\forall [a, b, c, d] \quad \text{Dom } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \mathcal{C}(a, d).$$
- (ii) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbb{T}_{1D}$ $\mathbf{JD}$ -convexidad.
- (iii) Si $S \subset X$ y existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \neq C \subset S$, entonces

$$\forall x \in S, \mathcal{C}\text{-vis}(x, S) = \bigcap \left\{ C \in \mathcal{M}(S) \mid x \in C \right\}.$$
- (iv) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbf{T}$ -convexidad.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Resulta de 2.5.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Es consecuencia de 2.5 y 2.7 (iv).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sea $S \subset X$. Si existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \neq C \subset S$, entonces, por 2.5 y 2.7 (iv), $\mathcal{C}\text{-mir}(S) = \bigcap \mathcal{M}(S)$. Por otra parte, si no existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \neq C \subset S$, entonces $\mathcal{M}(S) = \{\emptyset\}$ y además $\forall \{x, y\} \subset S, \mathcal{C}(x, y) \subset S$. Así, $\bigcap \mathcal{M}(S) = \emptyset = \mathcal{C}\text{-mir}(S)$. De esta forma $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbf{T}$ -convexidad.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Tendremos que ver, únicamente, que $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbb{T}_{1D}$ -convexidad. Supongamos contrariamente que existen $x \in X, C \in \mathcal{C} - \{\emptyset\}$, tales que $\mathcal{C}(x) \not\subset \{x\} \cup C$. Sea $S = \{x\} \cup C$. Así, si $y \in S, \mathcal{C}(x, y) \not\subset S$, es decir $x \notin \mathcal{C}\text{-st}(y, S)$, de donde $\mathcal{C}\text{-mir}(S) = \emptyset$. Pero como $\mathcal{C}(x) \not\subset \{x\} \cup C$, entonces $\mathcal{M}(S) = \{C\}$ y $\bigcap \mathcal{M}(S) = C \neq \emptyset = \mathcal{C}\text{-mir}(S)$.

Por 2.4 (ii) y la equivalencia entre (ii), (iii) y (iv) de 2.5,

obtenemos el siguiente corolario, que es el teorema 3.3 de [4].

COROLARIO 2.9: Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad, entonces son equivalentes:

- (i) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de $\mathbb{T}_1$ JD-convexidad.
- (ii) $\forall S \subset X, \forall x \in S, \mathcal{C}\text{-vis}(x, S) = \bigcap \left\{ C \in \mathcal{M}(S) \mid x \in C \right\}$.
- (iii) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de T-convexidad tal que

$$\forall S \subset X, \quad S = \bigcup \mathcal{M}(S).$$

3. CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS DE CONVEXIDAD DE DREŠEVIĆ Y DE KAKUTANI.

En 1970 Drešević demostró un teorema de separación para conjuntos estrellados en espacios vectoriales reales [5]. En 1976, (2.3) VI de [2], se probó este teorema en un contexto axiomático. La definición que damos a continuación se basa en el teorema de Drešević.

Diremos que $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de convexidad de Drešević si y sólo si satisface la siguiente propiedad:

Si $A \subset X, B \subset X, A \cap B = \emptyset, a \in \mathcal{C}\text{-mir}(A)$ y $b \in \mathcal{C}\text{-mir}(B)$, entonces existen $C \subset X, D \subset X$, tales que $C \cap D = \emptyset, C \cup D = X, A \subset C, B \subset D, a \in \mathcal{C}\text{-mir}(C)$ y $b \in \mathcal{C}\text{-mir}(D)$.

El siguiente teorema caracteriza los espacios de Drešević utilizando únicamente las relaciones $\mathcal{R}[a, b, c, d]$.

TEOREMA 3.1. Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (i) $\forall [a, b, c, d] \quad \text{Im } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \mathcal{C}(a, b)$.
- (ii) Si $C \subset X, D \subset X, C \cap D = \emptyset, a \in \mathcal{C}\text{-mir}(C), b \in \mathcal{C}\text{-mir}(D)$ y $p \in X$, entonces $\mathcal{C}(a, p) \cap D = \emptyset$ o $C \cap \mathcal{C}(b, p) = \emptyset$.
- (iii) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de convexidad de Drešević.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que existen $C \subset X, D \subset X, a \in \mathcal{C}\text{-mir}(C), b \in \mathcal{C}\text{-mir}(D)$ y $p \in X$, tales que $\mathcal{C}(a, p) \cap D \neq \emptyset$ y $C \cap \mathcal{C}(b, p) \neq \emptyset$. Luego, existen $d \in \mathcal{C}(a, p) \cap D$ y $c \in C \cap \mathcal{C}(b, p)$. Pero $\text{Im } \mathcal{R}[b, p, a, d] = \mathcal{C}(b, p)$; así existe $e \in \mathcal{C}(b, d)$ tal que $e \mathcal{R} c$, es decir, $e \in \mathcal{C}(a, c)$. Luego $e \in \mathcal{C}(a, c) \cap \mathcal{C}(b, d) \subset C \cap D$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Demostración análoga a vi) $\Rightarrow$ v), de (4.1) de [3].

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que $\exists [a, b, c, d]$ tal que $\text{Im } \mathcal{R}[a, b, c, d] \neq \mathcal{C}(a, b)$. De esta forma, $\exists y \in \mathcal{C}(a, b)$ tal que $\mathcal{C}(a, d) \cap \mathcal{C}(c, y) = \emptyset$. Procediendo en forma análoga a la demostración de v) $\Rightarrow$ i), (4.1) de [3], se llega a una contradicción.

El teorema de Kakutani permite, en espacios vectoriales reales, separar dos subconjuntos convexos disjuntos, mediante un par de subconjuntos convexos complementarios. Basándonos en este teorema damos la siguiente definición.

Diremos que $(X, \mathcal{C})$ es un *espacio de convexidad de Kakutani* si y sólo si cumple la siguiente propiedad:

Si $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$, $A \cap B = \emptyset$, entonces existen $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{C}$, tales que $C \cap D = \emptyset$, $C \cup D = X$, $A \subset C$ y $B \subset D$.

El teorema de Kakutani fue generalizado, en un contexto axiomático, por J. W. Ellis [6]. Los espacios de T_1 JD-convexidad con un axioma de separabilidad equivalente a 3.1 (i), son espacios de convexidad de Kakutani. En ellos se puede desarrollar una teoría de semiespacios y puntos extremales [1].

El siguiente teorema se obtiene como consecuencia de 2.5 y 3.1 de este trabajo y de las demostraciones de (4.1) de [3], que siguen siendo válidas en espacios de JD-convexidad.

TEOREMA 3.2. *Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (i) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de S-convexidad tal que $\forall [a, b, c, d] \text{ Dom } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \mathcal{C}(a, d)$ y $\text{Im } \mathcal{R}[a, b, c, d] = \mathcal{C}(a, b)$.
- (ii) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de JD-convexidad de Kakutani.
- (iii) $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de JD-convexidad de Drešević.

REFERENCIAS:

- [1] BRESSAN, J. C., *Sistema axiomático para operadores de cápsula convexa*. Revista de la U. M. A., **26** (1972) 131-142.
- [2] BRESSAN, J. C., *Sistemas axiomáticos para la convexidad*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemática, Facultad de

Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, (1976).

- [3] BRESSAN, J. C., *Estrellados y separabilidad en un sistema axiomático para la convexidad*, Revista de la U. M. A., **31** (1983) 1-5.
- [4] BRESSAN, J. C., TORANZOS, F. A., *Visibility cells and T-convexity spaces*, Comp. Math. **83** (1992) 251-257.
- [5] DREŠEVIĆ, M., *A note on Kakutani Lemma*, Noticiario Matemático (en ruso), **7** (22), (1970) 347-348.
- [6] ELLIS, J. W., *A general set-separation theorem*, Duke Math. J. **19** (1952) 417-421.
- [7] HAMMER, P. C., *Extended topology : Domain finiteness*, Indag. Math. **25** (1963) 200-212.
- [8] KOŁODZIEJCZYK, K., *Starshapedness in convexity spaces*, Comp. Math. **56** (1985) 361-367.
- [9] TORANZOS, F. A., *Radial functions of convex and starshaped bodies*, Amer. Math. Monthly **74** (1967) 278-280.
- [10] TORANZOS, F. A., *The points of local nonconvexity of star-shaped sets*, Pacific J. **101** (1982) 209-213.

Juan Carlos Bressan
Departamento de Fisicomatemática
Facultad de Farmacia y Bioquímica
Universidad de Buenos Aires
Junín 956
(1113) Buenos Aires - ARGENTINA

Recibido en diciembre de 1994.