RESEÑA DEL LIBRO:
Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators

Autores: Chongying Dong and James Lepowsky

Reseñado por: N. Andruskiewitsch

Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin. 1993. Progress in Mathematics, volumen 112. 202 páginas. ISBN 0-8176-3721-4

1. ¿Qué es un álgebra de operadores de vértice?

Informalmente, la noción de álgebra de operadores de vértice es una respuesta al problema de hallar una estructura algebraica "natural" que describa la ecuación

$$A(z_1)B(z_2) = B(z_2)A(z_1).$$

Aquí, A y B son familias de operadores en un espacio vectorial, indexadas por variables complejas z_1 y z_2. La ecuación precedente se entiende en el sentido de continuación analítica; en efecto, se supone que el miembro izquierdo está definido sólo en el dominio $|z_1| > |z_2|$, mientras que el derecho lo está sólo en $|z_1| < |z_2|$. El análisis de las condiciones impuestas por esta ecuación lleva a la definición de álgebra de operadores de vértice.

Formalmente, un álgebra de operadores de vértice es un espacio V de dimensión infinita, provisto de una familia de operadores $Y(v,z) : V \to V$, indexada por dos variables: $v \in V$, $z \in \mathbb{C}$. Esta familia de operadores debe estar sujeta a ciertos axiomas, siendo el más destacado de entre ellos la identidad de Jacobi:

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u,z_1)Y(v,z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v,z_2)Y(u,z_1)$$
$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u,z_0)v,z_2).$$

Aquí, $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$; formalmente, es la expansión de la distribución δ. La identidad de Jacobi, que tiene lugar en el álgebra de series formales con coeficientes en End V, representa una familia infinita de identidades en End V; recibe este nombre por su similitud con la identidad de Jacobi de las álgebras de Lie.

2. ¿Por qué interesan las álgebras de operadores de vértice?

Esencialmente, por sus conexiones con tres áreas distintas: grupos finitos, álgebras de Kac-Moody y teoría conforme de campos.

Como se sabe, la clasificación de los grupos finitos simples– ver [GLS]– es posible gracias al descubrimiento del último grupo esporádico, conocido como el Monstruo. Un problema inherente al estudio del Monstruo es su realización como grupo de simetrías de algún objeto matemático. El principal resultado del libro [FLM] es, precisamente, mostrar que el Monstruo es un grupo de simetrías de un álgebra de operadores de vértice.

En segundo lugar, la teoría de álgebras de operadores de vértice permite construir explícitamente representaciones de peso máximo de ciertas álgebras de Kac-Moody afines. Recordemos que las álgebras de Kac-Moody son generalizaciones de dimensión infinita de las álgebras de Lie semisimples.

En tercer lugar, los aspectos algebraicos de la teoría conforme de campos pueden ser interpretados en términos de representaciones de álgebras de operadores de vértice. La teoría conforme de campos es una corriente de la física teórica que ha influenciado varias ramas de la matemática en los últimos quince o veinte años.

3. ¿De qué trata el libro reseñado?

Se presentan diversas generalizaciones de la noción de álgebra de operadores de vértice: las "álgebras de operadores de vértice generalizadas", las "álgebras de vértice generalizadas" y las "álgebras abelianas entrelazantes". Todas ellas se definen mediante sistemas de axiomas entre los cuales se destacan diversas identidades de Jacobi.

La principal motivación para estas generalizaciones es el estudio del problema, similar al anterior, de encontrar familias de operadores que satisfagan la ecuación

$$A(z_1)B(z_2) = e^{i\pi r}B(z_2)A(z_1),$$

donde r es un número racional que depende de A y B. La estructura algebraica subyacente a este problema es la de Z-álgebras, ver por ejemplo [LW]. Las Z-álgebras están relacionadas con la construcción de representaciones de álgebras de Kac-Moody afines.

De modo que las generalizaciones presentadas en este libro proveen un contexto axiomático natural donde se incluyen las Z-álgebras, y otras variaciones de la noción de álgebra de operadores de vértice.

Si bien la lectura de esta monografía no requiere en principio prerrequisitos elevados (los autores indican en el prefacio: "We have tried to make text quite accesible and self-contained, altough the reader would probably find that some exposure to [FLM] would be helpful"), parece recomendable sólo para quienes tengan intereses específicos en algunas de las áreas mencionadas.

Referencias

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Academic Press, New York, 1988.

[GLS] D. Gorenstein, R. Lyons and R. Solomon, *The classification of the finite simple groups*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[LW] J. Lepowsky and R.L. Wilson, *Z-algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Vertex Operator in Mathematics and Physics, Publ. Math. Sci. Res. Inst. 3, Springer-Verlag, New York, 1985, pp. 97–142.

FAMAF, Avs. Medina Allende y Haya de la Torre, 5000 Ciudad Universitaria, Córdoba, Argentina.

E-mail: andrus@mate.uncor.edu