Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 41, Nro. 4, 2000, 47-59

SOBRE EL ACOTAMIENTO Y LA ESTABILIDAD GLOBAL ASINTÓTICA DE LA ECUACIÓN DE LIÉNARD CON TÉRMINO RESTAURADOR

Juan E. Nápoles Valdés

ABSTRACT

In that paper, we study the boundedness and asymptotic stability in the whole of solutions of equation (1), without making use of the classical Second Method of Liapunov. Some generalizations are also presented.

ANTECEDENTES. Consideremos la Ecuación de Liénard con término restaurador:

$$x''+F(x)x'+a(t)g(x)=p(t), \qquad (1)$$

donde las funciones que intervienen, satisfacen las siguientes condiciones no usuales:

a) Existe $f\in CP(\mathbf{R})$ tal que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

b) g: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ suficientemente suave, $g(0)=0$ y con límites al infinito:

$$g(-\infty) = \lim_{x\rightarrow-\infty} g(x),\ g(+\infty) = \lim_{x\rightarrow+\infty} g(x).$$

c) $a\in L(I)$, $0<a_1\leq a(t)\leq a_2<+\infty$, siendo $L(I)$ la clase funciones integrable Lebesgue sobre $I:=[0,+\infty)$.

d) $p\in L^\infty(\mathbf{R})$ acotada, pero no necesariamente periódica.

Variadas cuestiones sobre la prolongabilidad, acotamiento, periodicidad y oscilación de las soluciones de la ecuación (1) autónoma, i.e., $x''+F(x)x'+g(x)=0$ se han considerado en los últimos 50 años; muchos de estos intentos se han hecho para obtener condiciones suficientes sobre F y g para que las soluciones de ésta posean determinadas propiedades

Mathematics Subject Classification (1991).
Primmary: 34D20, 34C11
Secundary: 34D05
Key words: Liénard equation, boundedness, global asymptotic stability

cualitativas. Recomendamos al lector para una extensa bibliografía de los artículos aparecidos hasta 1962 a Reissig, Sansone and Conti [36], los artículos de Cherkas [5] y Graef [8] para las referencias hasta 1976, Staude [44], Villari [48], Zhifen [50] hasta 1987 y más recientemente, el artículo de Nagabuchi y Yamamoto [21]. Bibliografía suplementaria, y resultados importantes, pueden ser encontrados en Burton y Townsend [3-4]. Para otros resultados de interés, se recomienda consultar Elabbasy [6], Furuya [7] y Hricisakova [19].

La ecuación (1), como generalización natural, ha devenido fuente de innumerables investigaciones en los últimos años, recomendamos al lector consultar [2], [3-4], [9-11], [12], [13-14], [15-16], [20], [24], [33], [39-40], [41], [45], [46-47], [49], [51] y [52], así como las referencias citadas allí, para una pequeña muestra de las investigaciones cualitativas realizadas, relativas a la estabilidad global, acotamiento y existencia de soluciones periódicas.

Este estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación (1), requiere en muchas ocasiones el uso de apropiadas Funciones de Liapunov y de la continuidad de las funciones que intervienen en ella. Aquí realizaremos este estudio sin apelar, en general, a dichas consideraciones, lo que permitirá generalizar y precisar diversos resultados anteriores para la ecuación (1). De los resultados obtenidos se desprenderá, en particular, la equivalencia del método de Burton y Townsend (ver [4]) y el empleado por diversos matemáticos rusos (entre ellos, Bibikov y Nazarov, ver [2] y [33]), recomendamos al lector que consulte también [41].

La clase de funciones $h\in L^\infty(\mathbf{R})$, con valor medio dado por:

$$\bar{h} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} h(t)dt,$$

uniformemente en a, será denotada por V.

RESULTADOS. El siguiente resultado, puede ser obtenido fácilmente de [37, Lema 1].

Teorema 1. Asumamos que $g\in C(\mathbf{R})$, que posea límites al infinito y que:

$$g(-\infty)<g(x)<g(+\infty),\ \forall x\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

En adición, una de las siguientes hipótesis se cumple:

$$p\in V,\ g(-\infty)<\bar{p}(t)<g(+\infty), \tag{3}$$

$$p\in L^\infty(\mathbf{R});\ g(-\infty)=-\infty,\ g(+\infty)=+\infty. \tag{4}$$

Entonces, (1) posee una solución en $W^{2,\infty}(\mathbf{R})$. Además, $\forall\gamma>0$, $\exists\Gamma>0$ tal que si $x(t)$ es una solución de (1) con $|x(t_0)|+|x'(t_0)|\le\gamma$, para cierto $t_0\in\mathbf{R}$, entonces $|x(t)|+|x'(t)|\le\Gamma$, $t\ge t_0$.

En nuestro trabajo, asumiremos que una de las siguientes condiciones sobre las funciones f, g se satisfacen:

C_1. Existen n, N, m, M>0 tales que:

$$0 < n \leq \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \leq N, \ \forall x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2;$$

$$0 < m \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq M, \ \forall x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2.$$

C_2. Existen N, M>0 y funciones $\phi,\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ con límite nulo a $+\infty$ y tal que, para cada r>0:

$$\phi(r) \leq \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \leq N, \ \forall x_1, x_2 \in [-r, r], x_1 \neq x_2;$$

$$\varphi(r) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq M, \ \forall x_1, x_2 \in [-r, r], x_1 \neq x_2.$$

Ambas consideraciones implican, en particular, que $f,g\in C(\mathbf{R})$, satisfacen una condición de Lipschitz y son estrictamente crecientes. Los intervalos [n,N] para C_1 y [0,N] para C_2, serán una medida de cuánto difiere el comportamiento de nuestra ecuación de la ecuación diferencial lineal:

$$x''+\alpha(t)x'+\beta(t)x=0, \tag{5}$$

con $\alpha,\beta\in L^\infty(\mathbf{R}_+)$, $m\leq\alpha(t)\leq M$, $n\leq\alpha(t)\leq N$ ctp $t\in\mathbf{R}_+$.
Las funciones A=A[n] y B=B[N], con $w_n=|4n-m^2|^{1/2}$ y $\arctan:(-\infty,\infty)\to(-\pi/2,\pi/2)$, definidas más abajo como:

$$A[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{m}, & \text{si } n = 0 \\ n^{-1/2}\exp\left\{-m w_n^{-1} \operatorname{arg\,tanh}\left(\dfrac{w_n}{m}\right)\right\}, & \text{si } 0 < n < \dfrac{m^2}{4} \\ 2m^{-1}e^{-1}, & \text{si } n = \dfrac{m^2}{4} \\ n^{-1/2}\exp\left\{-m w_n^{-1} \arctan\left(\dfrac{w_n}{m}\right)\right\}, & \text{si } n > \dfrac{m^2}{4} \end{cases}$$

$$B[n]=\begin{cases}0, & \text{si } 0\le N\le \dfrac{m^2}{4}\\ n^{-1/2}\exp\left\{-mw_N^{-1}\left[\arctan\left(\dfrac{w_N}{m}\right)-\pi\right]\right\}, & \text{si } N>\dfrac{m^2}{4}\end{cases}$$

jugarán un papel decisivo en nuestro trabajo.
En lo sucesivo, se usará también la notación A=A[n] y B=B[N].
Para la ecuación (5), existen diversos resultados, que presentamos más abajo, y que pueden ser demostrados partiendo de las ideas y demostraciones correspondientes de [1], [17], [18] y [41, Cap. III]. La idea básica es comparar (5) con una ecuación con coeficientes constantes. Así, dada una constante $k>0$ y $m\in\mathbf{R}$, consideremos la ecuación diferencial:

$$x''+mx'+kx=0,$$

y sean ϕ_k, ψ_k las soluciones que satisfacen $\phi_k(0)=\psi_k'(0)=0$, $\psi_k(0)=\phi_k'(0)=1$. Denotemos por T_k el primer cero positivo de ϕ_k' y por Z_k el primer cero positivo de ψ_k ($Z_k=+\infty$ si $k\le m^2/4$).

Lema 1. Sea x una solución de (5). Los ceros positivos de x e x′ son aislados y ellos pueden ser reordenados en una sucesión (quizás finita) de uno de los tipos siguientes:

$$0\le\tau_1<\varepsilon_1<\tau_2<\varepsilon_2<\ \dots\ \text{ó}\ \ 0\le\varepsilon_0<\tau_1<\varepsilon_1<\tau_2<\ \dots$$

con $x(\varepsilon_i)=0$ e $x'(\tau_i)=0$.

El siguiente resultado, muestra que no es necesario imponer cotas sobre la derivada, basta acotar la solución.

Lema 2. Dadas constantes $K,\varepsilon>0$ ($\varepsilon<n$) tal que $|x(t)|\le Ke^{-m(t-t_0)}$, $\forall t\in[t_0,t_1]$, donde x es solución de (5), se tendrá:

$$|x'(t)|\le\left[|x'(t_0)|+K\|\beta\|_\infty e^{(n-\varepsilon)(t-t_0)}\right],\quad \forall t\in[t_0,t_1].$$

Lema 3. Sea x una solución de (5) y sea τ un cero de x' y ε el primer cero de x después de τ (se toma $\varepsilon=+\infty$ si tal cero no existe). Entonces:

$$|x(t)|\le R|x(\tau)|e^{-\sigma(t-\tau)},\quad \forall t\in[\tau,\varepsilon],$$

con σ dada por $\sigma=\frac{m}{2}-\frac{v_m}{2}$, si $n\ne\frac{m^2}{4}$ y $0<\sigma<\frac{m}{2}$ si $n=\frac{m^2}{4}$, siendo $v_m=|4m-n^2|^{\frac{1}{2}}$, y $R=\mathrm{Sup}\{e^{\sigma t}|\Psi_n'(t)|:\ t\ge 0\}$. Además, si $\varepsilon<+\infty$, entonces $|x'(\varepsilon)|\le B|x(\tau)|$.

Lema 4. Sea x una solución de (5) y sea ε un cero de x. Entonces existe τ, cero de x', tal que $T_N \leq \tau - \varepsilon \leq T_n$. Además, $|x(t)| \leq A|x'(\varepsilon)|$, $\forall t \in [\varepsilon, \tau]$.

Lema 5. Sea x solución de (5) y sean $\tau_- < \tau_+$ dos ceros consecutivos de x' y $\varepsilon \in (\tau_-, \tau_+)$ el cero intermedio de x. Entonces, para cada $\gamma > AB$ existe $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, n, N, m)$ tal que:

$$|x(t)| \leq \gamma |x(\tau_-)| e^{-\varepsilon(t-\tau_-)}, \quad \forall t \in [\varepsilon, \tau_+].$$

Observación 1. En particular, $|x(t)| \leq AB|x(\tau_-)|$, $\forall t \in [\varepsilon, \tau_+]$.

Teorema 2.
a) si $A[n]B[N] < 1$, (5) es uniforme asintóticamente estable.
b) si $A[n]B[N] = 1$, (5) es uniformemente estable. Además, existe $\beta \in L^{\infty}(\mathbf{R}_+)$ que satisface $n \leq \beta(t) \leq N$ y tal que (5) no es asintóticamente estable.
c) si $A[n]B[N\} > 1$, existe $\beta \in L^{\infty}(\mathbf{R}_+)$ que satisface $n \leq \beta(t) \leq N$ y tal que (5) es inestable.

Observación 2. Este teorema brinda información adicional. En el caso a), el siguiente planteamiento es cierto: existen $k, \varepsilon > 0$ (dependientes solo de n, N y m) tales que, para toda solución de (5) se tiene:

$$|x(t)| + |x'(t)| \leq k\left[|x(t_0)| + |x'(t_0)|\right]\exp\left[-\varepsilon(t - t_0)\right], \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{6}$$

O sea, la estabilidad global asintótica de la solución nula. En el caso c) y la segunda parte de b), la función β puede ser escogida de tal forma que admita una extensión periódica, para un período suficientemente grande.

Demostración.
a) Probemos que (6) se cumple. No es restrictivo suponer $t_0=0$. Sean x_1 , x_2 las soluciones de (5) que satisfacen $x_1(0)=x_2'(0)=1$, $x_1'(0)=x_2(0)=0$. La linealidad de la ecuación reduce la verificación de (6) al caso $x=x_i$, $y=1,2$. El Lema 2 implica que solo es necesario tener una cota para $|x_i|$. En consecuencia, es suficiente probar que existen $K, \delta > 0$ (que dependen solo de n, N, m) tales que:

$$|x(t)| \leq K e^{-\delta t}, \ \forall t \geq 0, \ i=1,2. \tag{7}$$

Sea i=1. El Lema 1 plantea que la sucesión de ceros de x_i y x_i' poseen la forma:

$$0 = \tau_0 < \varepsilon_1 < \tau_1 < \varepsilon_2 < \tau_2 < \ \ldots$$

En caso que esta sucesión sea finita, de acuerdo con el Lema 4 el último término es un cero de x_1 y en tal caso, sea τ_n tal último término. Busquemos una cota para $|x_1|$ sobre cada intervalo de la forma $[\tau_n, \varepsilon_{n+1})$ y $[\varepsilon_n, \tau_{n+1}]$. Sea $\gamma \in (AB, 1)$ fijo y $\varepsilon \in (0, \sigma)$ como en el Lema 5.

En $[0,\varepsilon_1)$ aplicando el Lema 3 obtenemos que $|x_1(t)| \leq Re^{-\varepsilon t}$, $\forall t\in[0,\varepsilon_1)$.
Si $\varepsilon_1=+\infty$, la prueba termina. Asumiendo que $\varepsilon_1<+\infty$ se aplica el Lema 5 sobre $[\varepsilon_1, \tau_1]$ y se tiene que $|x_1(t)| \leq \gamma e^{-\varepsilon t} \leq e^{-\varepsilon t}$. Por un proceso iterativo obtenemos, para cada $n\geq 0$,

$$|x_1(t)| \leq Re^{-\varepsilon t} \text{ si } t \in [\tau_n, \varepsilon_{n+1}),$$
$$|x_1(t)| \leq e^{-\varepsilon t} \text{ si } t \in [\varepsilon_n, \tau_n],$$

lo que prueba (7) con $K=R\geq 1$ y $\delta=\varepsilon$.

c) Consideremos las funciones:

$$\beta_1(t) = \begin{cases} n \text{ si } t \in (0,T_n) \\ N \text{ si } t \in (T_n,L) \end{cases}, \quad \alpha_1(t) = m, \forall t \in (0,L),$$

donde $L=Z_N+T_N$. Sea β la extensión periódica de β_1 a todo $\mathbf{R}_+$. Ella satisface $n\leq\beta(t)\leq N$ y la correspondiente solución de (5), para $\alpha_1(t)\equiv m$, con $x(0)=0$, $x'(0)=1$ es dada por:

$$x(t) = \begin{cases} \phi_n(t) & \text{si } t \in [0,T_n] \\ A\Psi_N(t-T_n) & \text{si } t \in [T_n, L] \end{cases}.$$

Puesto que $x(L)=0$, $x'(L)=-AB$, la periodicidad de la ecuación implica que $x(t+L)=-ABx(t)$, $\forall t\in\mathbf{R}$. En consecuencia, $-AB$ es un multiplicador de Floquet y la ecuación es inestable si $AB>1$.

Este caso, para $\alpha_1(t) = \begin{cases} m, \text{ si } t \in (0,T_n) \\ M, \text{ si } t \in (T_n,L) \end{cases}$, se demuestra de forma similar.

b) La primera parte, es similar al caso anterior a) y es útil la Observación 1. La segunda parte se demuestra como c).
Esto completa la demostración.■

Teorema 3. Asumamos que C_1 se cumple y que $A[n]B[N]<1$. Entonces, para cada $p\in L^{\infty}(\mathbf{R})$, la ecuación (1) posee una solución acotada $x_0\in W^{2,\infty}(\mathbf{R})$ y esta solución es asintótica y exponencialmente estable, en sentido global.

Observación 3. La curva $AB=1$, puede ser esbozada en el plano (n,N). La región $AB<1$ es la región de estabilidad dada por el presente teorema y muestra la desviación de la ecuación (1) de la ecuación lineal (5), $n=N$.

Demostración.
Sea $x_0\in W^{2,\infty}(\mathbf{R})$ la solución acotada de (1) dada por el Teorema 1 y sea x_1 otra solución definida en $[t_0,\infty)$. Definamos:

$$\beta(t)=\begin{cases}\dfrac{g(x_1(t))-g(x_0(t))}{x_1(t)-x_0(t)} & \text{si } x_1(t)\neq x_0(t)\\[2ex] \dfrac{n+N}{2} & \text{si } x_1(t)=x_0(t)\end{cases},$$

así mismo:

$$\alpha(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x_1(t))-f(x_0(t))}{x_1(t)-x_0(t)} & \text{si } x_1(t)\neq x_0(t)\\[2ex] \dfrac{m+M}{2} & \text{si } x_1(t)=x_0(t)\end{cases},$$

Estas funciones son medibles sobre (t_0,∞). La función $y(t)=x_1(t+t_0)-x_0(t+t_0)$ es una solución de (5), tomando $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ desplazadas a $t+t_0$. Puesto que $AB<1$ el Teorema 1 a) se aplica. Así la desigualdad (6) se cumple y el teorema se cumple.■

Observación 4. Este teorema, generaliza los resultados de [41] (ver sección siguiente), donde se estudia la convergencia de todas las soluciones de la ecuación (1), con $p\equiv 0$ y n,m estrictamente positivos, a una única solución w-periódica (en nuestro caso, la estabilidad global asintótica de la solución nula de (1)).

Teorema 4. Asumamos que C_2 y (2) ó (3) se cumplen. Si $A[0]B[N]<1$ entonces, la ecuación (1) posee una solución acotada $x_0\in W^{2,\infty}(\mathbf{R})$ y esta solución es uniforme asintóticamente estable en sentido global.

Demostración.
Como en el teorema anterior, sea $x_0\in W^{2,\infty}(\mathbf{R})$ la solución acotada de (1) dada por el Teorema 1. Para cada $\gamma>0$ denotemos por $\Gamma>0$ la constante dada por dicho teorema. Sea x_1 una solución de (1) que satisface $|x_1(t_0)|+|x_1'(t_0)|\leq\gamma,\quad t_0\geq 0$.
Entonces $y=x_1-x_0$ es una solución de una ecuación del tipo (5) con (siguiendo C_2) $m\leq\alpha(t)\leq M$, $n\leq\beta(t)\leq N$ c.t.p. $t\in\mathbf{R}^+$; $n,m=\phi(r)$, $r\geq\text{máx}\{\Gamma,\|x_0\|_\infty\}$. Puesto que A es decreciente con respecto a n, $A[n]B[N]<1$, de donde x satisface un estimado de la forma (6), con K y ε dependientes de γ. Este hecho prueba el teorema.■

SOBRE UN RESULTADO DE REPILADO Y RUIZ. Hemos señalado que el Teorema 3 extiende los resultados de [41], pues al estudiar bajo qué condiciones todas las soluciones de la ecuación (1), con $p\equiv 0$, convergen a una única solución w-periódica, existen casos (al tomar n, m estrictamente positivas) que no fueron contemplados en dicho trabajo. Así, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5 ([41, pág. 33]). Bajo los siguientes casos, se tendrá la convergencia de todas las soluciones a una única solución w-periódica:

a) si m^2-4N≥0,

b) si m^2-4n<0 entonces se tendrá el resultado deseado, con la condición inicial en el semipla o superior, si y solo se satisface la desigualdad:

$$-2m\left\{\frac{\arctan\left[\frac{w_n}{m}\right]}{w_n}-\frac{\arctan\left[\frac{w_n}{m}\right]}{w_N}\right\}+\ln\left(\frac{N}{n}\right)<0,$$

c) si m^2-4n>0 y m^2-4N<0 entonces se tendrá el resultado deseado, en el semiplano superior, si y solo sí:

$$-\frac{m\ln\left\{\frac{[m-w_n]}{[m-w_N]}\right\}}{}+\ln\left(\frac{N}{n}\right)+2\frac{\arctan\left[\frac{w_n}{m}\right]}{w_n}<0,$$

d) si w_n=0 y m^2-4N<0, se tendrá el resultado deseado en el semiplano superior si y solo sí:

$$\frac{2m\arctan\left[\frac{w_n}{m}\right]}{w_N}+\ln\left(\frac{4N}{m^2}\right)<2.$$

Observación 5. Invitamos al lector a comprobar lo siguiente. En los casos que a continuación se relacionan, tenemos la estabilidad global asintótica de la solución trivial de (1), utilizando el lenguaje del Teorema 3:

a) $0\leq N\leq m^2/4$.
a_1. n=0. (*)
a_2. $0<n<m^2/4$.
a_3. $n=N=m^2/4$. (*)

b) $n>m^2/4$, $N>m^2/4$.

c) $n<m^2/4$.
c_1. $N>m^2/4$.
c_2. $0\leq N\leq m^2/4$. (*)

d) $n=m^2/4$ y $N>m^2/4$.
d_1. $n=m^2/4$ y $N>m^2/4$.
d_2. $n=N=m^2/4$. (*)

Donde se han señalado, mediante (*), aquellos subcasos no contemplados en dicho trabajo.

Observación 6. Cuando $a(t)\equiv 1$, los Teoremas 1, 2, 3 y 4 coinciden con los obtenidos en [1].

Observación 7. Los resultados obtenidos, son consistentes con aquellos de [31], en lo referente a la existencia global de las soluciones de la ecuación (1) y con [28], [31], [39] y [51] en lo relativo a la estabilidad global asintótica.

Observación 8. El Teorema 5, es obtenido utilizando el método de la construcción de una región de estabilidad para la ecuación (1) (ver [4] y [38]), sin embargo, el Teorema 3, se basa en la utilización de ciertas relaciones entre las cotas n, N, m y M (ver [2], [32], [33], [38] y [41]). En virtud de los comentarios al último resultado, es fácil, pero tedioso, obtener la equivalencia entre la condición $AB<1$, dada en el Teorema 3, y los casos presentados en el Teorema 5, obteniendo el resumen presentado en la Observación 4.

Observación 9. Consideremos el sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(y)-\beta(y)F(x), \\ y' &= -a(t)g(x). \end{aligned} \qquad (8)$$

El cual contiene, tomando $\alpha(y)=y$, $\beta(y)\equiv 1$ y $F'(x)=f(x)$, a la ecuación (1) como caso particular. Utilizando una idea similar a la usada aquí, puede obtenerse una conclusión similar a la Observación 4, para el sistema (8), lo cual mostraría la equivalencia de los resultados obtenidos en [38] (construyendo una región de estabilidad) y [32] (utilizando cotas *a priori* sobre las funciones que intervienen en dicho sistema). Ésta conclusión es consistente, y complementa, los resultados obtenidos en [22-28], [29-31], [37] y [42].

Referencias.

[1] Alonso, J.M. and R. Ortega-"Boundedness and global asymptotic stability of a forced oscillator", Nonlinear Anal., 25(1995), 297-309.

[2] Bibikov, Yu.N.-"Convergencia en la Ecuación de Liénard con término restaurador", Vestnik L.G.U. (Matem.), 7(1976), 87-90 (en ruso).

[3] Burton, T.A. and C.G. Townsend-"On the generalized Liénard equation with forcing term", J. Differential Equations 4(1968), 620-633.

[4] Burton, T.A. and C.G. Townsend-"Stability regions of the forced Liénard equation", J. London Math. Soc. (2), 3(1971), 393-402.

[5] Cherkas, L.A.-"Estimation of the number of lymit cycles of autonomous system", J. Differential Equations 13(1977), 529-547.

[6] Elabbasy, E.M.-"On the qualitative behavior of solutions of generalized Liénard equation", Kyungpook Math. J. 36(196), 275-282.

[7] Furuya, S.-"On a nonlinear differential equation", Coment Math. Univ. St. Pau, 9(1961), 97-113.

[8] Graef, J.R.-"On the generalized Liénard equation with negative damping", J. Differential Equations 12 (1972), 34-62.

[9] Guidorizzi, H.L.-"Oscillating and Periodic Solutions of Liénard Equations", 32° Seminário Brasileiro de Análise, 1991, 175-192.

[10] Guidorizzi, H.L.-"On the existence of periodic solutions for the equation $x''+f(x)x'+g(x)=0$", Bol. Soc. Bras. Mat. 22(1) (1991), 81-92.

[11] Guidorizzi, H.L.-"The family of functions $S_{\alpha,k}$ and the Liénard equation", por aparecer Tamkang J. of Math.

[12] Hara, T.-"On the Vinograd type theorems for Liénard Systems", Nonlinear Anal., 20(1993), 647-658.

[13] Hara, T. and T. Yoneyama-"On the global center of generalized Liénard equation and its application to stability problems" (I), 28(1985), 171-192.

[14] Hara, T. and T. Yoneyama-"On the global center of generalized Liénard equation and its application to stability problems" (II), 31(1988), 221-225.

[15] Hara, T., T. Yoneyama and J. Sugie-"Necessary and sufficient conditions for the continuability of solutions of the systems $x'=y-F(x)$, $y'=-g(x)$", Appl. Anal., 19(1985), 169-180.

[16] Hara, T., T. Yoneyama and J. Sugie-"A necessary and sufficient condition for oscillation of the generalized Liénard equation", Ann. Mat. Pura Appl. (IV), CLIV (1989), 223-230.

[17] Hatvani, L. and V. Totik-"Asymptotic stability of the equilibrium of the damped oscillator", Differential and Integral Equations, por aparecer.

[18] Hatvani, L., T. Krisztin and V. Totik-"A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator", J. Differential Equations, por aparecer.

[19] Hricisakova, D.-"Negative solutions of the generalized Liénard equation", Hiroshima Math. J. 23(1992), 55-160.

[20] Llilievich, L.I.-"On the periodic solutions of Liénard's equation", Differentsialnie Uravnenia, T.23, 4(1987), 608-611 (en ruso).

[21] Nagabuchi, Y. and M. Yamamoto-"On the oscillation of solutions for Liénard quation with perturbing term", Math. Japonica 37, 4(1992), 629-636.

[22] Nápoles, J.E.-"On the ultimate boundedness of solutions of systems of differential equations", Revista Integración, 13(1995), 41-47.

[23] Nápoles, J.E.-"A continuation result for a bidimensional system of differential equation", Revista Integración, 13(1995), 49-54.

[24] Nápoles, J.E.-"On the continuability of solutions of bidimensional systems", Revista Extracta Mathematica, 11(1996), 366-368.

[25] Nápoles, J.E.-"Sobre el caso de un ciclo límite estable único en un sistema bidimensional", Revista Ciencias Matemáticas, XVI(1997), 91-94.

[26] Nápoles, J.E.-"Sobre la existencia de un centro local y el carácter oscilatorio de un cierto sistema bidimensional", Revista Ciencias Matemáticas, por aparecer.

[27] Nápoles, J.E.-"Sobre la existencia de un centro global y el acotamiento de las soluciones de un cierto sistema bidimensional", Revista Ciencias Matemáticas, por aparecer.

[28] Nápoles, J.E.-"On the global stability of non-autonomous systems", Revista Colombiana de Matemáticas, por aparecer.

[29] Nápoles, J.E. y J.A. Repilado-"Condiciones suficientes para la oscilabilidad de las soluciones del sistema $x'=\alpha(y)-\beta(y)f(x)$, $y=-a(t)g(x)$", Revista Ciencias Matemáticas, XV(1994), 161-166.

[30] Nápoles, J.E. y J.A. Repilado-"Sobre la prolongabilidad y no-oscilación de las soluciones del sistema bidimensional $x'=\alpha(y)-\beta(y)f(x)$, $y'=-a(t)g(x)$", Revista Ciencias Matemáticas, XV(1994), 155-160.

[31] Nápoles, J.E. y J.A. Repilado-"Sobre el acotamiento y la estabilidad global asintótica de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales", Revista Ciencias Matemáticas, XVI(1997), 83-86.

[32] Nápoles, J.E. and A.I. Ruiz-"Convergence in nonlinear systems with a forcing term", Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, 4(1): 1-5 (1997).

[33] Nazarov, E.A.-"Sobre la convergencia de las soluciones de la Ecuación de Liénard", Diferentsialnie Uravnenija, XII(1977), 1792-1795 (en ruso).

[34] Omai, P.; G. Villari and F. Zanolin-"Periodic solutions of the Liénard equation with one-sided growth restrictions", J. Diferential Equatons 67(1987), 278-293.

[35] Ponzo, P. and N. Wax-"On peiodic solutions of the system x′=y-F(x), y′=-g(x)", J. Differential Equations 18(1974), 262-269.

[36] Reissig, R.; G. Sansone and R. Conti-"Qualitative theorie nichtlinearer differentialgleichungen", Roma, Edizioni Cremonese, 1963.

[37] Repilado, J.A. y J.E. Nápoles-"Prolongabilidad, oscilabilidad y acotamiento de las soluciones de un sistema bidimensional no autónomo de ecuaciones diferenciales", Revista Ciencias Matemáticas, XV(1994), 167-179.

[38] Repilado, J.A. y J.E. Nápoles-"On the convergence of solutions of a bidimensional system to unique periodic solution", Revista Ciencias Matemáticas, XVII(1999).

[39] Repilado, J.A. y A.I. Ruiz-"Sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial x''+g(x)x'+ a(t)f(x)=0"(I), Revista Ciencias Matemáticas, VI(1985), 65-71.

[40] Repilado, J.A. y A.I. Ruiz-"Sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial x''+g(x)x'+ a(t)f(x)=0" (II), Revista Ciencias Matemáticas, VII(1986), 35-39.

[41] Ruiz, A.I.-"Comportamiento de las trayectorias de sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales", Tesis Doctoral, Universidad de Oriente (Santiago de Cuba), 1988.

[42] Ruiz, A.I. y J.E. Nápoles-"Existencia y Unicidad del ciclo límite de una clase de sistemas bidimensionales", Revista Ciencias Matemáticas, XVI(1997), 87-90.

[43] Shu-Xiang, Y. and Z. Ji-Zhou-"On the center of the Liénard equation", J. Differential Equations, 102(1993), 53-61.

[44] Staude, U.-"Uniqueness of periodic solution of the Liénard equation", Recent Adances in Differential Equations, Trieste, 1978.

[45] Sugie, J. and T. Hara-"Non-existence of Periodic Solutions of the Liénard System", Math. Anal. and Appl., 159(1991), 224-236.

[46] Villari, G.-"Periodic solutions of Liénard's equation", J. Math. Anal. Appl., 86(1982), 379-386.

[47] Villari, G.-"On the existence of periodic solutions for Liénard's equation", Nonlinear Analysis, 7(1983), 71-78.

[48] Villari, G.-"On the qualitative behavior of solutions of Liénard equations", J. Differential Equations 67(1987), 269-277.

[49] Weigao, G.-"On the existence of periodic solutions of Liénard systems", Nonlinear Anal. , 16(1991), 183-190.

[50] Zhifen, Z.-"Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized Liénard equation", Applicable Analysis, 23(1986), 63-76.

[51] Zoladek, H.-"Algebraic invariant curves for the Liénard equation", Trans. Amer. Math. Soc., 350(1998), 1681-1701.

[52] Zuo-Huan, Z.-"On the nonexistence of periodic solutions for the Liénard equations", Nonlinear Anal., 16(1991), 101-110.

Universidad de la Cuenca del Plata, Plácido Martínez 964, (3400) Corrientes
cuencadelplata@arnet.com.ar
Universidad Tecnológica Nacional, UDB Matemática, French 414, (3500) Resistencia, Chaco

Recibido	:	23	de	Noviembre	de	1999
Versión Modificada	:	3	de	Abril	de	2000
Aceptado	:	30	de	Abril	de	2000