REVISTA DE LA
UNION MATEMATICA ARGENTINA
Volumen 42, Número 2, 2001, Páginas 1-8

Una nota sobre la Lógica Modal Intuicionista $\mathbf{IMK}_k$

Sergio Celani
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Exactas. Universidad Nacional del Centro.
e.mail: scelani@exa.unicen.edu.ar

Resumen

In this note we shall introduce the intuitionistic modal logic $\mathbf{IMK}_k$ as a generalization of the classical modal logic M_k [5]. We will show that this logic is canonical and that it does not have the finite model property.

1 Introducción

Existe un renovado interés en el estudio de lógicas modales intuicionistas, debido principalmente a las aplicaciones que tienen las lógicas no-clásicas en Computación Teórica. No existe una única definición de lógica modal intuicionista. En la literatura hay varios cálculos modales basados en el cálculo proposicional intuicionista. Por ejemplo, en [1] y [3] se estudian lógicas intuicionistas modales definidas con un operador $\Box$ o con un operador $\Diamond$. En [4] y [7] (ver también [9] y [8]) se investigan lógicas modales con los dos operadores y ciertos axiomas que ligan dichos operadores.

En esta nota vamos a estudiar una extensión de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IK}_\Box$ [1]. Probaremos que esta lógica es completa respecto a la clase de sus marcos y que es canónica pero que no tiene la propiedad de los modelos finitos. Esta lógica es una generalización natural de la lógica modal M_k definida sobre el cálculo proposicional clásico (ver, por ejemplo, [5]).

2 Preliminares

Supondremos que el lector tiene cierta familiaridad con los conceptos y resultados fundamentales sobre lógica modal y lógica intuicionista. Una buena referencia para estos tópicos es [2].

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje proposicional modal que consiste de un conjunto infinito de variables Var, los conectivos $\wedge, \vee, \Box, \rightarrow$, y además una constante proposicional $\bot$. La negación $\neg$ y la constante proposicional $\top$ son definidas por $\neg p = p \rightarrow \bot$ y $\top = \neg\bot$, respectivamente. Fm simbolizará el conjunto de todas las fórmulas. La lógica intuicionista será denotada por **Int**.

Diremos que un conjunto $\Gamma \subseteq Fm$ es una *lógica intuicionista modal,* o que es una $\mathbf{IK}_\Box$-lógica, si contiene a los siguientes axiomas símbolos $\langle\mathcal{F},V\rangle \vDash_x \varphi$, si $x \in V(\varphi)$. Una fórmula φ es *válida en un modelo* $\langle\mathcal{F},V\rangle$, en símbolos $\langle\mathcal{F},V\rangle \models \varphi$, si es válida en todo elemento de X. Una fórmula φ es válida en un marco $\mathcal{F}$, en símbolos $\mathcal{F} \models \varphi$, si para toda valuación V sobre $\mathcal{F}$, φ es válida en el modelo $\langle\mathcal{F},V\rangle$.

Sea $\mathcal{I}$ una $\mathbf{IK}_\Box$-lógica. Denotaremos por $\mathrm{Fr}(\mathcal{I})$ la clase de todos los marcos donde toda fórmula de $\mathcal{I}$ es válida. Sea F una clase de marcos. $Th(\mathsf{F})$ simbolizará la clase de todas las fórmulas válidas en todo marco de F. Una lógica $\mathcal{I}$ es *caracterizada* por una clase de marcos F, o es completa relativa a la clase de marcos F , o F-*completa*, si $Th(\mathsf{F}) = \mathcal{I}$.

Vamos a utilizar la siguiente notación. Dada una fórmula φ , escribimos $\Box^0\varphi = \varphi$ y $\Box^{n+1}\varphi = \Box\Box^n\varphi$. Sea R una relación definida en un conjunto X. Recordemos que R^{n+1} es $R^n \circ R$ y R^0 es la identidad, donde $\circ$ denota la composición de relaciones.

Lema 2.2 *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R\rangle$ un marco. Entonces,*

1. $\leq \circ R^n \subseteq R^n \circ \leq$.

2. *para todo* $x \in X$, $R^n_\Box(x) \in \mathcal{P}_c(X)$.

Demostración. Es sencilla y se deja a cargo del lector. ■

Corolario 2.3 *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R\rangle$. Para cada $n \in \omega$ y para cada $p \in Var$ la función V definida por: $V(p) = R^n_\Box(x)$, es una valuación.*

Demostración. Es inmediata por el Lema 2.2. ■

Sea $\mathcal{I}$ una $\mathbf{IK}_\Box$-lógica. Un conjunto de fórmulas es una *teoría* de $\mathcal{I}$, o una $\mathcal{I}$-teoría, si y sólo si es cerrado bajo la relación de deducibilidad $\vdash_\mathcal{I}$. Una teoría Γ de $\mathcal{I}$ es *prima* si es consistente y para cada par de fórmulas φ, ψ si $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, entonces $\varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

Recordemos que el *marco canónico* de $\mathcal{I}$ es la estructura $\mathcal{F}_c = \langle X_c, \subseteq, R_c\rangle$ donde X_c es el conjunto de todas las teorías primas, $\subseteq$ es la relación de inclusión, y R_c es la relación definida por

$$(P,Q) \in R_c \Leftrightarrow \Box^{-1}(P) \subseteq Q,$$

donde $\Box^{-1}(P) = \{\varphi \in Fm : \Box\varphi \in P\}$ (ver [1], [3], [6] o [9]). El *modelo canónico* es el par $\mathcal{M}_c = \langle\mathcal{F}_c, V_c\rangle$ donde V_c es la valuación definida por:

$$V_c(p) = \{\Gamma \in X_c : p \in \Gamma\}.$$

Una lógica $\mathcal{I}$ es *canónica* si el marco canónico de $\mathcal{I}$ es un marco de la lógica, es decir si $\mathcal{F}_c \vDash \mathcal{I}$. En [1] y [3] se prueba que la lógica $\mathbf{IK}_\Box$ y algunas extensiones de ella son canónicas.

Proposición 2.4 *Sea Γ una teoría consistente y sea Δ un conjunto de fórmulas cerrado bajo disyunciones (es decir: si $\varphi, \psi \in \Delta$ entonces $\varphi \vee \psi \in \Delta$) y tal que $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. Entonces existe una teoría prima P tal que $\Gamma \subseteq P$ y $P \cap \Delta = \emptyset$.*

símbolos $\langle \mathcal{F}, V\rangle \vDash_x \varphi$, si $x \in V(\varphi)$. Una fórmula φ es *válida en un modelo* $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, en símbolos $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \varphi$, si es válida en todo elemento de X. Una fórmula φ es válida en un marco $\mathcal{F}$, en símbolos $\mathcal{F} \models \varphi$, si para toda valuación V sobre $\mathcal{F}$, φ es válida en el modelo $\langle \mathcal{F}, V\rangle$.

Sea $\mathcal{I}$ una $\mathbf{IK}_\Box$-lógica. Denotaremos por $\mathrm{Fr}(\mathcal{I})$ la clase de todos los marcos donde toda fórmula de $\mathcal{I}$ es válida. Sea F una clase de marcos. $Th(\mathsf{F})$ simbolizará la clase de todas las fórmulas válidas en todo marco de F. Una lógica $\mathcal{I}$ es *caracterizada* por una clase de marcos F, o es completa relativa a la clase de marcos F , o F-*completa*, si $Th(\mathsf{F}) = \mathcal{I}$.

Vamos a utilizar la siguiente notación. Dada una fórmula φ , escribimos $\Box^0\varphi = \varphi$ y $\Box^{n+1}\varphi = \Box\Box^n\varphi$. Sea R una relación definida en un conjunto X. Recordemos que R^{n+1} es $R^n \circ R$ y R^0 es la identidad, donde $\circ$ denota la composición de relaciones.

Lema 2.2 *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R\rangle$ un marco. Entonces,*

1. $\leq \circ R^n \subseteq R^n \circ \leq$.

2. *para todo $x \in X$, $R^n_\Box(x) \in \mathcal{P}_c(X)$.*

Demostración. Es sencilla y se deja a cargo del lector. ■

Corolario 2.3 *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R\rangle$. Para cada $n \in \omega$ y para cada $p \in Var$ la función V definida por: $V(p) = R^n_\Box(x)$, es una valuación.*

Demostración. Es inmediata por el Lema 2.2. ■

Sea $\mathcal{I}$ una $\mathbf{IK}_\Box$-lógica. Un conjunto de fórmulas es una *teoría* de $\mathcal{I}$, o una $\mathcal{I}$-teoría, si y sólo si es cerrado bajo la relación de deducibilidad $\vdash_{\mathcal{I}}$. Una teoría Γ de $\mathcal{I}$ es *prima* si es consistente y para cada par de fórmulas φ, ψ si $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, entonces $\varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

Recordemos que el *marco canónico* de $\mathcal{I}$ es la estructura $\mathcal{F}_c = \langle X_c, \subseteq, R_c\rangle$ donde X_c es el conjunto de todas las teorías primas, $\subseteq$ es la relación de inclusión, y R_c es la relación definida por

$$(P, Q) \in R_c \Leftrightarrow \Box^{-1}(P) \subseteq Q,$$

donde $\Box^{-1}(P) = \{\varphi \in Fm : \Box\varphi \in P\}$ (ver [1], [3], [6] o [9]). El *modelo canónico* es el par $\mathcal{M}_c = \langle \mathcal{F}_c, V_c\rangle$ donde V_c es la valuación definida por:

$$V_c(p) = \{\Gamma \in X_c : p \in \Gamma\}.$$

Una lógica $\mathcal{I}$ es *canónica* si el marco canónico de $\mathcal{I}$ es un marco de la lógica, es decir si $\mathcal{F}_c \vDash \mathcal{I}$. En [1] y [3] se prueba que la lógica $\mathbf{IK}_\Box$ y algunas extensiones de ella son canónicas.

Proposición 2.4 *Sea Γ una teoría consistente y sea Δ un conjunto de fórmulas cerrado bajo disyunciones (es decir: si $\varphi, \psi \in \Delta$ entonces $\varphi \vee \psi \in \Delta$) y tal que $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. Entonces existe una teoría prima P tal que $\Gamma \subseteq P$ y $P \cap \Delta = \emptyset$.*

Demostración. Ver, por ejemplo, [1]. ■

Proposición 2.5 $\langle \mathcal{F}_c, V_c \rangle \vDash_P \varphi \Leftrightarrow \varphi \in P.$

Demostración. Ver [1]. ■

Corolario 2.6 *La lógica modal* **IK** *es canonica y completa respecto a la su clase de marcos.*

El siguiente resultado será necesario en la prueba de la completitud de la lógica $\mathbf{IKM}_k$ para el caso particular de $n = 2$.

Lema 2.7 *Sea $\mathcal{F}_c$ el marco canónico de $\mathcal{I}$. Entonces, para todo par $P, Q \in X_c$,*

$$(P, Q) \in R_\square^n \Leftrightarrow \{\varphi : \square^n \varphi \in P\} \subseteq Q. \tag{1}$$

Demostración. La prueba es por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es inmediato. Supongamos que (1) se cumple para n. Si $(P, Q) \in R_\square^{n+1}$ entonces es inmediato comprobar que $\{\varphi : \square^{n+1}\varphi \in P\} \subseteq Q$.

Supongamos que $\{\varphi : \square^{n+1}\varphi \in P\} \subseteq Q$. Consideremos el conjunto $\square^{-1}(P)$ y sea Δ la clausura bajo disyunciones del conjunto $\{\square^n \psi : \psi \notin Q\}$. Probemos que

$$\square^{-1}(P) \cap \Delta = \emptyset.$$

Si suponemos lo contrario, entonces existe una fórmula $\square\alpha \in P$ y una fórmula $\square^n\psi \in \Delta$ tal que $\vdash_\mathcal{I} \alpha \to \square^n\psi$. Entonces $\vdash_\mathcal{I} \square\alpha \to \square^{n+1}\psi$. Como P es una teoría, $\square^{n+1}\psi \in P$. Entonces, $\psi \in Q$, lo que es un absurdo. En consecuencia, por la Proposición 2.4, existe $D \in X_c$ tal que $\square^{-1}(P) \subseteq D$ y $\Delta \cap D = \emptyset$. Entonces, $(P, D) \in R_\square$, y $\{\alpha : \square^n\alpha \in D\} \subseteq Q$. Por la hipótesis inductiva, se sigue que $(P, D) \in R_\square$ y $(D, Q) \in R_\square^n$, es decir, $(P, Q) \in R_\square^{n+1}$. ■

3 La lógica $\mathbf{IKM}_k$

Sea $\mathbf{IKM}_k$ la lógica modal intuicionista definida por

$$\mathbf{IK}_\square + \{\square\varphi \to \varphi\} + \left\{\square\left(\square^2\varphi \to \square\psi\right) \to (\square\varphi \to \psi)\right\}.$$

Sea $\mathcal{F}$ un marco y consideremos la siguiente condición:

$\mathbf{M}_k$ $\forall x \exists y \exists z\, (x R_\square y \wedge y \leq z \wedge z R_\square x \wedge \forall w\, (z R_\square^2 w \Rightarrow (x R_\square w)))$.

Esta condición es una generalización de la condición similar definida en [5], página 154, cuando $\leq$ es la identidad.

Teorema 3.1 *Sea $\mathcal{F}$ un marco. Entonces, $\mathcal{F} \vDash \square(\square^2\varphi \to \square\psi) \to (\square\varphi \to \psi)$ si y sólo si $\mathcal{F}$ verifica la condición $\mathbf{M}_k$.*

Demostración. Asumimos que $\mathcal{F} \models \Box(\Box^2\varphi \to \Box\psi) \to (\Box\varphi \to \psi)$ y sea $x \in X$. Consideremos una valuación V definida en $\mathcal{F}$ por $V(p) = R_\Box(x)$ and $V(q) = X - (x]$. Es claro que esta valuación es creciente . Como $x \in V(\Box p)$ y $x \notin V(q)$, entonces $x \notin V(\Box p \to q)$. En consecuencia, $x \notin V(\Box(\Box^2 p \to \Box q))$, es decir: $R_\Box(x) \subsetneq V(\Box^2 p \to \Box q)$. Luego podemos asegurar la existencia de elementos $y, z, a \in X$ tales que

$$(x, y) \in R_\Box,\ y \leq z, z \in V(\Box^2 p),\ (z, a) \in R_\Box \text{ y } a \notin V(q).$$

Como $(z, a) \in R_\Box$ y $a \leq x$, entonces $(z, x) \in R_\Box$. Sea $w \in X$ tal que $(z, w) \in R_\Box^2$. Debido a que $z \in V(\Box^2 p)$, $w \in V(p) = R_\Box(x)$, es decir, $(x, w) \in R_\Box$. Por lo tanto, acabamos de probar que $\mathcal{F}$ verifica la condición $\mathbf{M}_k$.
Supongamos que $\mathcal{F}$ verifica la condición $\mathbf{M}_k$. Consideremos una valuación V sobre $\mathcal{F}$. Sean $x, w \in X$ tales que $x \leq w$, $w \in V(\Box(\Box^2\varphi \to \Box\psi))$, y $w \in V(\Box\varphi)$. Vamos a probar que $w \in V(\psi)$. Por hipótesis, existen $y, z \in X$ tales que $(w, y) \in R_\Box$, $y \leq z$ y $(z, w) \in R_\Box$. Ya que $w \in V(\Box(\Box^2\varphi \to \Box\psi))$, entonces $[y) \cap V(\Box^2\varphi) \subseteq V(\Box\psi)$. Probemos que $z \in V(\Box^2\varphi)$. Sea $a \in X$ tal que $(z, a) \in R_\Box^2$. Entonces, $(w, a) \in R_\Box$, y como $w \in V(\Box\varphi)$, deducimos que $a \in V(\varphi)$. Por lo tanto, $z \in V(\Box^2\varphi)$, y esto implica que $z \in V(\Box\psi)$. Finalmente, como $(z, w) \in R_\Box$, concluimos que $w \in V(\psi)$. ■

Antes de proceder a probar que la lógica $\mathbf{IKM}_k$ es canónica observemos que en el marco canónico $\mathcal{F}_c = \langle X_c, \subseteq, R_c \rangle$ se verifica que:

1. $(P, Q) \in R_\Box = R_c \circ \subseteq$ si y sólo si $\Box^{-1}(P) \subseteq Q$, para todo par $P, Q \in X_c$.

2. La condición $\mathbf{M}_k$ en el marco canónico se reduce a

$$\forall x \exists y \left(x R_\Box y\ \wedge y R_\Box x \wedge \forall w \left(y R_\Box^2 w \Rightarrow x R_\Box w \right) \right).$$

   Esto se debe a que la relación $\leq$ en $\mathcal{F}_c$ es la relación de inclusión entre teorías primas.

Teorema 3.2 *Sea $\mathcal{F}_c = \langle X_c, \subseteq, R_c \rangle$ el marco canónico de $\mathbf{IKM}_k$. Entonces la relación $R_\Box$ es reflexiva y $\mathcal{F}_c$ verifica la condición $\mathbf{M}_k$.*

Demostración. Como $\mathcal{F}_c \models \Box\varphi \to \varphi$, entonces $R_\Box$ es reflexiva (ver, por ejemplo [1]). Para probar la condición $\mathbf{M}_k$ consideremos una teoría prima P y la teoría Γ generada por el conjunto $\{\Box^2\varphi : \Box\varphi \in P\}$. Sea Δ la clausura bajo disyunciones del conjunto $\{\Box\varphi : \varphi \notin P\}$. Probemos que

$$\Gamma \cap \Delta = \emptyset.$$

En busca de una contradicción, suponemos lo contrario. Entonces existe $\Box\varphi \in P$ y existe $\psi \notin P$ tales que $\Box^2\varphi \vdash_{\mathbf{IKM}_k} \Box\psi$. Luego,

$$\begin{aligned} \Box^2\varphi \vdash_{\mathbf{IKM}_k} \Box\psi \quad &\Rightarrow \quad \vdash_{\mathbf{IKM}_k} \Box^2\varphi \to \Box\psi \\ &\Rightarrow \quad \vdash_{\mathbf{IKM}_k} \Box(\Box^2\varphi \to \Box\psi) \\ &\Rightarrow \quad \vdash_{\mathbf{IKM}_k} \Box\varphi \to \psi. \end{aligned}$$

Como $\Box\varphi \in P$, entonces $\psi \in P$, lo que es una contradicción. En consecuencia $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. Ahora, por la Proposición 2.4, podemos asegurar que existe una teoría prima Q tal que $\Gamma \subseteq Q$ y $\Delta \cap Q = \emptyset$. Si $\Box\varphi \in P$, tenemos que $\Box\Box\varphi \in \Gamma$, y en consecuencia $\Box\varphi \in Q$. Como $\vdash_{\mathbf{IKM}_k} \Box\varphi \to \varphi$, entonces $\varphi \in Q$. Por lo tanto, $(P, Q) \in R_\Box$. También, como $\Delta \cap Q = \emptyset$, $(Q, P) \in R_\Box$. Si $(Q, D) \in R_\Box^2$ y $\Box\varphi \in P$, entonces $\Box\Box\varphi \in Q$. De donde se sigue que $\varphi \in D$. En consecuencia, $(P, D) \in R_\Box$ y por lo tanto la condición $\mathbf{M}_k$ es válida. ∎

Corolario 3.3 *La lógica* $\mathbf{IKM}_k$ *es canónica.*

Sea $\mathcal{I}$ una $\mathbf{IK}_\Box$-lógica. Recordemos que una lógica $\mathcal{I}$ tiene la *propiedad de los modelos finitos* si para cada fórmula φ que no es un teorema de $\mathcal{I}$ existe un modelo finito de $\mathcal{I}$, $\langle \mathcal{F}, V \rangle$, tal que $\langle \mathcal{F}, V \rangle \nvDash \varphi$. Es decir, la lógica $\mathcal{I}$ está caracterizada por la clase de los modelos finitos, y en consecuencia está caracterizada por la clase de los marcos finitos. Ahora vamos a probar que la lógica $\mathbf{IKM}_k$ no tiene la propiedad de los modelos finitos. La prueba está basada en el conocido resultado que afirma que todo marco $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R \rangle$ tiene asociada un álgebra de Heyting $H(\mathcal{F})$ con operadores modales, tal que para cualquier fórmula φ, $\mathcal{F} \vDash \varphi \Leftrightarrow H(\mathcal{F}) \vDash \varphi$. La estrategia será la siguiente. Primero probaremos que en todo marco finito de la lógica $\mathbf{IKM}_k$ la relación $R_\Box$ es transitiva. Por lo tanto, en todo marco finito de la lógica $\mathbf{IKM}_k$ la fórmula $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ es válida. Posteriormente mostramos un ejemplo de un marco infinito de la lógica $\mathbf{IKM}_k$ en donde la relación $R_\Box$ no es transitiva, y en consecuencia no es válida la fórmula $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$. Como conclusión tenemos que la lógica $\mathbf{IKM}_k$ no puede tener la propiedad de los modelos finitos.

Definición 3.4 *Un álgebra de Heyting modal es un álgebra* $\langle A, \vee, \wedge, \to, \Box, 0, 1 \rangle$ *tal que* $\langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1 \rangle$ *es un álgebra de Heyting y* $\Box$ *es un operador que cumple las ecuaciones:*

1. $\Box (a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$,
2. $\Box 1 = 1$,

Sea $\mathcal{F}$ un marco. Recordemos que $\langle \mathcal{P}_c(X), \cup, \cap, \to, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Heyting donde la operación $\to$ se define como $U \to V = \{x \in X : [x) \cap U \subseteq V\}$, para cualquier par $U, V \in \mathcal{P}_c(X)$. Definimos el operador modal $\Box_R$ como sigue:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R_\Box(x) \subseteq U\}.$$

Lema 3.5 *El álgebra* $\langle \mathcal{P}_c(X), \cup, \cap, \Box_R, \to, \emptyset, X \rangle$ *es un álgebra de Heyting modal.*

Demostración. Es sencilla y se deja a cargo del lector. ∎

Lema 3.6 *Sea* $\mathcal{F}$ *un marco. Entonces:*

1. $R_\Box$ *es reflexiva si y sólo si* $\Box_R(U) \subseteq U$, *para todo* $U \in \mathcal{P}_c(X)$,
2. $R_\Box$ *es transitiva si y sólo si* $\Box_R(U) \subseteq \Box_R\Box_R(U)$, *para todo* $U \in \mathcal{P}_c(X)$.

Demostración. Probamos 1. a modo de ejemplo. Supongamos que $\square_R(U) \subseteq U$, para cualquier $U \in \mathcal{P}_c(X)$. Sea $x \in X$ y consideremos el subconjunto $U = R_\square(x)$. Es claro, por la condición $\leq \circ R \subseteq R\circ \leq$, que U es creciente. Además, como $x \in \square_R(U)$, entonces $x \in U = R_\square(x)$. Por lo tanto $R_\square$ es reflexiva. La prueba en el otro sentido no presenta dificultad y se deja al lector. ■

Proposición 3.7 *Sea $\mathcal{F}$ un marco finito de* $\mathbf{IKM}_k$. *Entonces $R_\square$ es transitiva.*

Demostración. Por 2. del Lema 3.6 es suficiente probar que

$$\square_R(U) \subseteq \square_R\square_R(U), \text{ para todo } U \in \mathcal{P}_c(X).$$

Como $\square\varphi \to \varphi \in \mathbf{IKM}_k$, tenemos que $R_\square$ es reflexiva. Entonces $\square_R(U) \subseteq U$, para todo $U \in \mathcal{P}_c(X)$. Como X es un conjunto finito, entonces $\mathcal{P}_c(X)$ es también un conjunto finito. Esto implica que la siguiente cadena de inclusiones es finita:

$$... \subseteq (\square_R)^n(U) \subseteq (\square_R)^{n-1}(U) \subseteq ... \subseteq \square_R(U) \subseteq U.$$

En consecuencia, $(\square_R)^{n+1}(U) = (\square_R)^n(U)$ para algún $n < \omega$. Vamos a probar, por inducción, la siguiente implicación:

$$(\square_R)^{n+1}(U) = (\square_R)^n(U) \text{ entonces } (\square_R)^2(U) = \square_R(U). \tag{2}$$

El caso $n = 1$ es inmediato. Asumimos que (2) es verdadero para n y probemos que es verdadero para $n+1$. Supongamos que $(\square_R)^{n+2}(U) = (\square_R)^{n+1}(U)$. Entonces

$$\square_R\left((\square_R(U))^{n+1} \to (\square_R(U))^{n+2}\right) = X. \tag{3}$$

Como $\mathcal{F}$ es un marco de $\mathbf{IKM}_k$,

$$\square_R\left((\square_R)^{n+1}(U) \to (\square_R)^{n+2}(U)\right) \to \left((\square_R)^n U \to (\square_R)^{n+1} U\right) = X.$$

Por (3) deducimos que

$$(\square_R)^n(U) \to (\square_R)^{n+1}(U) = X,$$

y esto es equivalente a

$$(\square_R)^n(U) \subseteq (\square_R)^{n+1}(U).$$

Como también se verifica la inclusión

$$(\square_R)^{n+1}(U) \subseteq (\square_R)^n(U),$$

entonces $(\square_R)^n(U) = (\square_R)^{n+1}(U)$. Ahora, por la hipótesis inductiva $(\square_R)^2(U) = \square_R(U)$. Por lo tanto, $R_\square$ es transitiva. ■

Proposición 3.8 *La lógica* $\mathbf{IKM}_k$ *no tiene la propiedad de los modelos finitos*

Demostración. Sea ω el conjunto de los naturales y sea $\leq$ el orden usual definido en ω. Consideremos la relación $R \subseteq \omega \times \omega$ definida por: $(a,b) \in R \Leftrightarrow a \leq b+1$. Entonces es sencillo comprobar que:

1. $\leq \circ R \subseteq R \circ \leq$.

2. $\langle \omega, \leq, R \rangle$ cumple la condición $\mathbf{IKM}_k$.

Luego de 1. y 2. y como $R_\Box$ es reflexiva, la estructura $\langle \omega, \leq, R \rangle$ es un marco de la lógica $\mathbf{IKM}_k$. Pero, $R_\Box$ no es transitiva, pues

$$(n, n-1) \in R_\Box, \quad (n-1, n-2) \in R_\Box \text{ y } \quad (n, n-2) \notin R_\Box.$$

Como conclusión tenemos que la lógica $\mathbf{IKM}_k$ no tiene la propiedad de los modelos finitos. ■

Referencias

[1] M. Božić, K. Dožen, *Models for Normal Intuitionistic Modal Logics*, Studia Logica, vol. 43 (1984), pp. 217-245.

[2] Chagrov, A., and M. Zakharyaschev, **Modal Logic**, Oxford University Press, Oxford Logic Guides, 35, 1997.

[3] K. Dožen, *Models for Stronger Normal Intuitionistic Modal Logics*, Studia Logica, vol. 44 (1985), pp. 39-70.

[4] G. Fischer-Servi., *Axiomatizations For Some Intuitionistic Modal Logics,* Rend. Sem. Mat Polit. de Torino 42 (1984), pp. 179-194.

[5] G. E. Hugues - M. J. Cresswell,, **A New Introduction to Modal Logic**, Routledge, Londres 1996.

[6] H. Ono, *On Some Intuitionistic Modal Logics,* Publication of The Research Institute for Math. Sc. 13 (1977), pp. 687-722.

[7] G. Plotkin and C. Stirling, *A framework for Intuitionistic Modal* Logic, J. Y. Halpern (ed.), Theorical Aspects of Reasoning and Knowledge, Morgan-Kaufmann (1986), pp. 399-406.

[8] A. K. Simpson, *The Proof Theory and Semantics of Intuicionistic Modal Logic,* PhD-Dissertation, Edinburgh, (1993).

[9] F. Wolter and M. Zakharyaschev, *The relation between intuitionistic and classical modal logics.* Algebra i Logica, vol.36, No. 2 (1997), pp. 121-155 (and also Algebra and Logica, vol. 36, No. 2 (1997), pp. 73-92.)

Recibido el 21 de diciembre de 1999.
Aceptado el 30 de mayo de 2001.