REVISTA DE LA
UNIÓN MATEMATICA ARGENTINA
Volumen 44, Número 2, 2003, Páginas 1-19

SOBRE LA MEDIDA DE CONJUNTOS AUTOSEMEJANTES

MARIANO FERRARI

Abstract

In this paper we give conditions which permit to estimate the Hausdorff measure $\mathcal{H}^s(K)$ of a self similar s-set K: $K = \cup_{i=1}^{l} \varphi_i(K)$, φ_i contractions. In particular, we treat the case when K is of bounded distortion. An algorithm, analogous to one given in [P2], is exhibited which permits in a practical way to estimate $\mathcal{H}^s(K)$. We show that this algorithm can also be applied in the case when K is graph-directed. Finally, we give an example where $\mathcal{H}^s(K)$ is estimated for K a graph-directed set of Sierpinski type.

1 Introducción.

Decimos que un subconjunto compacto K de $\mathbf{R}^n$ es autosemejante si existe un conjunto finito I, y una familia de contracciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq r_i|x-y| \ , \tag{1}$$

donde $|\cdot|$ representa la norma Euclidea en $\mathbf{R}^n$ y $r_i < 1$ para todo i, de modo que

$$K = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(K). \tag{2}$$

Es importante observar que para toda familia de contracciones existe un único conjunto compacto K que satisface (2) [H, F2, YHK].

Cuando las contracciones φ_i son similitudes, es decir que satisfacen

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| = r_i|x-y| \ , \quad r_i < 1 \ , \quad \forall x, y \in K \ ,$$

para cada i, diremos que K es autosemejante definido por similitudes.

AMS Subject Classification: 28A78, 28A80

Sea s la dimensión de Hausdorff de K, denotaremos con $\mathcal{H}^s(K)$ la medida de K en su dimensión y supondremos en lo que sigue que esta medida es finita y no nula, o sea que K es un s-conjunto.

Usaremos la siguiente notación: I^k para representar el conjunto de las palabras de longitud k, $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_k$, $\omega_i \in I$; I^∞ para representar las sucesiones o palabras de longitud infinita; $I^* = \cup_{k\geq 1} I^k$; y para $\omega \in I^k$, con $k \geq 1$ notaremos

$$\varphi_\omega = \varphi_{\omega_1} \circ \ldots \circ \varphi_{\omega_k} ;$$

notaremos con $|\omega|$ a la longitud de la palabra ω y con $\omega|_k$, para $1 \leq k \leq |\omega|$, a la palabra $\omega_1\omega_2\ldots\omega_k$.

Definición. Definimos la función $f(\delta)$, para $\delta > 0$ y cualquier s-conjunto compacto K:

$$f(\delta) := \sup_{\substack{C_\delta \text{ Compacto, convexo} \\ \text{de diámetro } \delta}} \frac{\mathcal{H}^s(K \cap C_\delta)}{\delta^s}.$$

Las propiedades de la función $f(\delta)$, enunciadas en la Proposición 1 (abajo), son la clave para dar un algoritmo teórico-práctico para estimar, bajo ciertas condiciones, la medida de un conjunto autosemejante definido por similitudes, tal como se encuentra desarrollado en [P1] y [P2]. La siguiente Proposición ha sido probada en [P1] y [P2] y se enuncia aquí para orientar al lector.

Proposición 1. *Sea K un s-conjunto compacto, entonces*

a. $\overline{\lim}_{\delta\to 0} f(\delta) \geq 1$ *([F1], pág 24).*

b. La función $f(\delta)\delta^s$ es creciente y continua por derecha para $\delta > 0$, ([P1], Theorem 1).

c. Si K es un conjunto autosemejante definido por similitudes entonces $f(\delta) \leq 1$ para todo $\delta > 0$, ([P2], Theorem 4).

Dos preguntas motivaron el presente trabajo. En primer lugar, bajo qué condiciones sobre un conjunto autosemejante K puede asegurarse que la función $f(\delta)$ está acotada y cómo puede usarse esta cota para obtener, a su vez, cotas para $\mathcal{H}^s(K)$. En segundo lugar, si es posible extender el algoritmo desarrollado en [P2] a una clase de conjuntos más general.

Con respecto al primer punto, hemos logrado establecer condiciones suficientes para que $f(\delta)$ esté acotada, a esto se refieren las condiciones (D1) y (D2) y el Teorema 1. Estudiamos un tipo particular de conjuntos que satisfacen estas condiciones llamados de distorsión acotada (principle of bounded distortion en [F2], pág. 65), dando algunas condiciones para que $f(\delta)$ esté acotada inferiormente en algún intervalo contenido en los reales positivos, que resulta de utilidad para acotar $\mathcal{H}^s(K)$ (Proposición 4). Nosotros modificamos la definición de conjunto ϵ-discreto como aparece en [P2] y la usamos para exhibir **cotas** para la medida de K, en este sentido la Proposición 6 muestra cotas para $\mathcal{H}^s(K)$ en función de ciertos límites sobre subconjuntos de K y el Teorema 2 muestra las correspondientes cotas para el caso de distorsión acotada.

Con respecto al segundo punto, hemos estudiado los conjuntos autosemejantes grafo dirigidos. Extendemos parte de la teoría desarrollada para el caso autosemejante (Teorema 3) y luego mostramos que en el caso de ser K un conjunto autosemejante grafo dirigido definido por similitudes puede desarrollarse igual que antes un algoritmo teórico-práctico para **estimar** la medida de K (Teorema 4).

Por último, aplicamos la teoría anterior a un ejemplo de conjunto grafo dirigido obteniendo cotas numéricas para su medida.

2 Conjuntos de distorsión acotada.

Sea K un conjunto autosemejante como definimos anteriormente. Supondremos en lo que sigue que $s > 0$ ya que sino $\mathcal{H}^s(K)$ sería el cardinal de K y no tendríamos nada que decir.

Definimos abajo las condiciones (D1) y (D2) sobre las contracciones φ_i que, de alguna manera, limitan la deformación de las imágenes $\varphi_\omega(K)$. Observar que si G es un conjunto compacto tal que $\mathcal{H}^s(G \cap K) > 0$ entonces el diámetro de $G \cap K$, que notaremos $|G \cap K|$, también debe ser mayor que cero.

(D1) Para todo compacto G con $\mathcal{H}^s(G \cap K) > 0$ existe una constante $M(G)$ tal que

$$|\varphi_\omega(K)| \leq M(G).|\varphi_\omega(G \cap K)| \ ,$$

para todo $\omega \in I^*$.

(D2) Para todo compacto convexo G con $\mathcal{H}^s(G \cap K) > 0$ existe una constante $N(G)$ tal que

$$\mathcal{H}^s(\varphi_\omega(G \cap K)) \geq \frac{1}{N(G)} \cdot \frac{\mathcal{H}^s(G \cap K)}{|G \cap K|^s} \cdot |\varphi_\omega(G \cap K)|^s \ ,$$

para todo $\omega \in I^*$.

Para cada compacto convexo G tal que $\mathcal{H}^s(G \cap K) > 0$ definimos el subconjunto de K, $A(G)$, de la siguiente manera,

$$A_n(G) := \bigcup_{|\omega| \geq n} \varphi_\omega(G \cap K); \qquad\qquad A(G) := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

La siguiente Proposición es auxiliar para probar, en el Teorema 1, que $f(\delta)$ está acotada por $N(G)$ (comparar con la Proposición 1 c))

Proposición 2. *Supongamos que K verifica las condiciones (D1) y (D2), entonces $\mathcal{H}^s(A(G)) > 0$ para todo G compacto convexo tal que $\mathcal{H}^s(G \cap K) > 0$.*

Demostración : Supongamos que $\mathcal{H}^s(A(G)) = 0$ para algún G, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que $\mathcal{H}^s(A_{n_0}(G)) < \epsilon$. Observar que $A(K) = K$ y la familia $\{\varphi_\omega(K)\}_{|\omega|\geq n_0}$ es una familia de Vitali para K, entonces existe una subfamilia numerable disjunta $\{\varphi_\omega(K)\}_{\omega\in Q}$ tal que

$$\mathcal{H}^s(K) \leq \sum_{\omega\in Q} |\varphi_\omega(K)|^s + \epsilon \ ,$$

(cf. [F1, pág 11]). Luego, denotando $N'(G) = \frac{N(G)|G\cap K|^s}{\mathcal{H}^s(G\cap K)}$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(K) - \epsilon &\leq \sum_{\omega\in Q} |\varphi_\omega(K)|^s \leq \\
&\leq M(G)^s \sum_{\omega\in Q} |\varphi_\omega(G\cap K)|^s && \text{por (D1)}\\
&\leq M(G)^s N'(G) \sum_{\omega\in Q} \mathcal{H}^s(\varphi_\omega(G\cap K)) && \text{por (D2)}\\
&\leq M(G)^s N'(G)\, \mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{\omega\in Q} \varphi_\omega(G\cap K)\Big)\\
&\leq M(G)^s N'(G)\, \mathcal{H}^s(A_{n_0}(G)) \leq M(G)^s N'(G)\, \epsilon.
\end{aligned}$$

Resultaría entonces $\mathcal{H}^s(K) = 0$, lo que contradice nuestras hipótesis. ∎

Veremos ahora como $N(G)$ permite acotar el cociente $\frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G|^s}$.

Teorema 1. *Supongamos que K verifica las condiciones (D1) y (D2). Entonces $\frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G|^s} \leq N(G)$ para todo compacto convexo G con $\mathcal{H}^s(G\cap K) > 0$. En particular, si $N(G) \leq D_0$ para todo G, resulta que $f(\delta) \leq D_0$ para todo $\delta > 0$.*

Demostración : Supongamos que $\frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G|^s} = \beta N(G)$, con $\beta > 1$ para algún G. Entonces por la condición (D2) tenemos que

$$\mathcal{H}^s(\varphi_\omega(G\cap K)) \geq \frac{1}{N(G)} \cdot \frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G\cap K|^s} \cdot |\varphi_\omega(G\cap K)|^s \geq \beta \cdot |\varphi_\omega(G\cap K)|^s$$

Consideraremos nuevamente el conjunto $A(G)$. Por la Proposición 2 sabemos que $\mathcal{H}^s(A(G)) > 0$. Dado $\epsilon > 0$ sea n_0 tal que $\mathcal{H}^s(A_{n_0}(G)) \leq \mathcal{H}^s(A(G)) + \epsilon$. La familia $\{\varphi_\omega(G\cap K)\}_{|\omega|\geq n_0}$ es un cubrimiento de Vitali para $A(G)$, luego existe una familia numerable disjunta $\{\varphi_\omega(G\cap K)\}_{\omega\in Q}$ de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(A(G)) - \epsilon &\leq \sum_{\omega\in Q} |\varphi_\omega(G\cap K)|^s \leq \tfrac{1}{\beta} \sum_{\omega\in Q} \mathcal{H}^s(\varphi_\omega(G\cap K))\\
&\leq \tfrac{1}{\beta}\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{\omega\in Q} \varphi_\omega(G\cap K)\Big) \leq \tfrac{1}{\beta}\mathcal{H}^s(A_{n_0}(G))\\
&\leq \tfrac{1}{\beta}(\mathcal{H}^s(A(G)) + \epsilon)\ ,
\end{aligned}$$

lo que resulta contradictorio ya que $\mathcal{H}^s(A(G)) > 0$ y $\frac{1}{\beta} < 1$.

El segundo enunciado sigue directamente de la definición de $f(\delta)$. ■

Definición. Diremos que un conjunto autosemejante K es de distorsión acotada si pueden encontrarse constantes positivas L_ω y D, de modo que las contracciones φ_ω satisfagan

(DA)
$$D^{-1}L_\omega|x-y| \leq |\varphi_\omega(x) - \varphi_\omega(y)| \leq L_\omega|x-y| ,$$

para cualquier $x, y \in K$, y $\omega \in I^*$.

Si las contracciones φ_i son C^2-difeomorfismos conformes definidos sobre un conjunto abierto $V \supseteq K$ entonces "localmente" se comportan como similitudes y se satisface la condición de distorsión acotada [MU]. Esta clase de transformaciones abarca en particular los conjuntos de Julia de cierto tipo de funciones analíticas que pueden representarse como autosemejantes en el plano complejo.

Si G es un conjunto compacto convexo, sigue directamente de la definición que para todo $\omega \in I^*$

$$D^{-1}L_\omega|G\cap K| \leq |\varphi_\omega(G\cap K)| \leq L_\omega|G\cap K| \quad \text{y} \tag{3}$$
$$D^{-s}\, L_\omega^s\, \mathcal{H}^s(G\cap K) \leq \mathcal{H}^s(\varphi_\omega(G\cap K)) \leq L_\omega^s\, \mathcal{H}^s(G\cap K) , \tag{4}$$

(cf. [F1], pág 10). Tomando el cociente entre (4) y (3) obtenemos (D2):

$$D^{-s}\frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G\cap K|^s} \leq \frac{\mathcal{H}^s(\varphi_\omega(G\cap K))}{|\varphi_\omega(G\cap K)|^s}$$

Observar que en este caso $N(G) = D_0 = D^s$ en la notación del Teorema 1.

Tomando $G \supseteq K$ en (3) obtenemos

$$D^{-1}L_\omega|K| \leq |\varphi_\omega(K)| \leq L_\omega|K| ,$$

despejando L_ω en la última desigualdad y combinando esto nuevamente con (3) resulta

$$D^{-1}|K|^{-1}|\varphi_\omega(K)||G\cap K| \leq |\varphi_\omega(G\cap K)| \leq D|K|^{-1}|\varphi_\omega(K)||G\cap K|. \tag{5}$$

Lo cual, aparte de implicar la propiedad (D1), es otra manera de expresar (DA) que, si bien presenta cotas menos finas, puede ser de utilidad dependiendo del grado de dificultad para calcular las constantes L_ω.

Vemos de esta manera que los conjuntos de distorsión acotada verifican las condiciones (D1) y (D2), en particular vale el siguiente corolario:

Proposición 3. *Sea K un conjunto autosemejante de distorsión acotada, entonces $f(\delta) \leq D^s$ para todo $\delta > 0$.*

Observación. Si, en particular, $D = 1$, sigue el enunciado *c*) de la Proposición 1.

Las condiciones (D1) y (D2) son efectivamente más generales que la condición (DA). Consideremos por ejemplo las contracciones de $\mathbf{R}^2$

$$\varphi_1(x,y) = (\tfrac{1}{2}x, 0)\ ,\quad \varphi_2(x,y) = (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, 0)\ ,\quad \varphi_3(x,y) = (0,1)\,.$$

El conjunto autosemejante E asociado a estas transformaciones corresponde a la unión del segmento $[0,1]$ sobre el eje x con el punto $(0,1)$, luego la dimensión de E es 1 y $\mathcal{H}^1(E) = 1$. Estas transformaciones no verifican (DA) pero puede comprobarse, calculando directamente, que satisfacen (D1) y (D2).

Si bien sabemos que $\overline{\lim_{\delta \to 0}} f(\delta) \geq 1$, a los efectos de hacer estimaciones de $\mathcal{H}^s(K)$ resulta útil obtener cotas inferiores de f en intervalos mayores que cero. Generalmente, este tipo de cotas depende de la distribución geométrica de la medida en K, o sea de las funciones φ_i, sin embargo, en ciertos casos particulares, pueden encontrarse cotas satisfactorias. A esto se refiere la Proposición 4.

Definición. Diremos que un conjunto compacto K es $(\mathbf{M}, \mathbf{a})$**-contenido** si

$$\sup_{\delta \in [a, |K|]} f(\delta) \geq M.$$

Observar que $\sup\limits_{[a,|K|+\epsilon]} f(\delta) = \sup\limits_{[a,|K|]} f(\delta)$ para todo $\epsilon > 0$.

Proposición 4. *Sea K un conjunto de distorsión acotada.*

*A. Supongamos que existen $0 < r_0$, $0 < a < |K|$ tales que para toda bola cerrada B_r centrada en K de radio r menor que r_0 existe una **similitud** ψ con radio de contracción ρ y una sucesión $\omega \in I^*$ tales que*

(i) $\psi(B_r \cap K) \subseteq \varphi_\omega(K)$,

(ii) $L_\omega a \leq \rho r$.

*Entonces $\sup\limits_{[a,|K|]} f(\delta) \geq D^{-s}$. O sea K es $(\mathbf{D}^{-s}, \mathbf{a})$**-contenido**.*

*B. Supongamos que existen $0 < r_0$, $0 < a < |K|$ tales que para toda bola cerrada B_r centrada en K de radio r menor que r_0 existe una **traslación** ψ y una sucesión $\omega \in I^*$ tales que*

(i) $\psi(B_r) \cap K \subseteq \varphi_\omega(K)$,

(ii) $L_\omega a \leq r$,

(iii) $\mathcal{H}^s(\psi(B_r) \cap K) \geq \mathcal{H}^s(B_r \cap K)$.

*Entonces $\sup\limits_{[2Da,|K|]} f(\delta) \geq (2D)^{-s}$. O sea K es $((\mathbf{2D})^{-s}, \mathbf{2Da})$**-contenido**.*

C. *Si las imágenes* $\varphi_i(K)$ *son disjuntas y* distancia$\big(\varphi_i(K)\,,\,\varphi_j(K)\big) \geq d > 0$ *para* $i \neq j$ *entonces* $\sup\limits_{[D^{-1}d,|K|]} f(\delta) \geq D^{-s}$. *O sea* K *es* $(\mathbf{D^{-s}}, \mathbf{D^{-1}d})$***-contenido.***

Demostración : A. Sea $\delta_0 < r_0$ y G un conjunto compacto convexo, $|G| = \delta_0$ tal que $f(\delta_0) = \frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G|^s}$ (tal conjunto existe por la definición de $f(\delta)$, cf. [P1], Theorem 1). Sea $\delta_1 = |G \cap K|$. Como $\delta_1 \leq \delta_0 < r_0$, $G \cap K$ está incluido en una bola cerrada B_{δ_1} centrada en K y existen la similitud ψ y la sucesión ω de las hipótesis tales que $\psi(G \cap K) \subseteq \varphi_\omega(K)$. Por (DA), φ_ω es inyectiva sobre K, luego existe φ_ω^{-1} y $\varphi_\omega^{-1}(\psi(G \cap K)) \subseteq K$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} f(|\varphi_\omega^{-1}(\psi(G\cap K))|) &\geq \frac{\mathcal{H}^s(\varphi_\omega^{-1}(\psi(G\cap K))\cap K)}{|\varphi_\omega^{-1}(\psi(G\cap K))|^s} = \frac{\mathcal{H}^s(\varphi_\omega^{-1}(\psi(G\cap K)))}{|\varphi_\omega^{-1}(\psi(G\cap K))|^s} \\ &\geq \frac{L_\omega^{-s}\mathcal{H}^s(\psi(G\cap K))}{D^s L_\omega^{-s}|\psi(G\cap K)|^s} \qquad \text{por } (DA) \\ &\geq D^{-s}\frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G\cap K|^s} \geq D^{-s}\frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G|^s} = D^{-s}f(\delta_0). \end{aligned}$$

Además por (ii) y (DA) resulta que

$$|\varphi_\omega^{-1}(\psi(G\cap K))| \geq L_\omega^{-1}\rho|G\cap K| = L_\omega^{-1}\rho\delta_1 \geq a.$$

Como esto vale para todo $0 < \delta_0 < r_0$ y $\overline{\lim}_{\delta\to 0} f(\delta) \geq 1$ resulta lo enunciado.

B. Tomemos nuevamente $\delta < r_0$, G un conjunto compacto convexo, $|G| = \delta$ tal que $f(\delta) = \frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G|^s}$. G está incluido en una bola cerrada B_δ centrada en K. Considerando la traslación ψ y la sucesión ω de las hipótesis tenemos que $\varphi_\omega^{-1}(\psi(B_\delta) \cap K) \subseteq K$. Por (DA) vemos que $\varphi_\omega^{-1}(\psi(B_\delta) \cap K)$ está incluido en una bola cerrada $B_{DL_\omega^{-1}\delta}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} f(|B_{DL_\omega^{-1}\delta}|) \geq \frac{\mathcal{H}^s(B_{DL_\omega^{-1}\delta}\cap K)}{(2\delta DL_\omega^{-1})^s} &\geq \frac{\mathcal{H}^s(\varphi_\omega^{-1}(\psi(B_\delta)\cap K))}{(2\delta)^s D^s L_\omega^{-s}} \\ &\geq \frac{L_\omega^{-s}\,\mathcal{H}^s(\psi(B_\delta)\cap K)}{(2\delta)^s D^s L_\omega^{-s}} \qquad \text{por (DA)} \\ &\geq (2D)^{-s}\,\frac{\mathcal{H}^s(B_\delta\cap K)}{\delta^s} \qquad \text{por } (iii) \\ &\geq (2D)^{-s}\,\frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{\delta^s} = (2D)^{-s}\,f(\delta). \end{aligned}$$

Además

$$|B_{DL_\omega^{-1}\delta}| = 2\delta DL_\omega^{-1} \geq 2Da,$$

de lo que resulta lo enunciado.

Observación 1. Si (ii) se verifica para cierto a_0, entonces lo hace también para todo $a < a_0$. Luego si $2Da_0 > |K|$ resulta que K es $((2D)^{-s}, a)$-contenido para todo $a < |K|$.

Observación 2. Si en las hipótesis de la parte B cambiamos "para toda bola cerrada B_r centrada en K de radio r menor que r_0" por "para todo compacto convexo B_r de diámetro $r < r_0$" y el resto queda igual, entonces K es $(\mathbf{D^{-s}}, \mathbf{Da})$**-contenido**. Esta modificación no se utilizará en lo que resta del trabajo.

C. Veremos que este caso se reduce a un caso particular de los contemplados en la parte A.

Observar que podemos considerar que $L_i \leq r_i < 1$ para todo $i \in I$. Si fuera $r_i < L_i$ por (1) y (DA) tenemos que

$$D^{-1}r_i|x-y| \leq D^{-1}L_i|x-y| \leq |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq r_i|x-y|.$$

Luego podría tomarse $L_i = r_i$.

De las hipótesis sigue que para todo $i, j \in I$ y todo $\omega \in I^*$

$$\text{distancia}\big(\varphi_{\omega i}(K)\,,\,\varphi_{\omega j}(K)\big) \geq D^{-1}L_\omega d.$$

Sea $B_r(x)$ una bola cerrada centrada en K de radio suficientemente chico menor que d. Sabemos que existe una sucesión $\lambda \in I^\infty$ tal que $\lim_{k\to\infty}\varphi_{\lambda|_k}(K) = x$. Por (DA) vemos que para todo $\omega \in I^k$

$$L_\omega \leq DL_{\omega_1}L_{\omega_2}\ldots L_{\omega_k}.$$

Luego $\lim_{k\to\infty} L_{\lambda|_k} = 0$, ya que $L_i \leq r_i < 1$ para todo $i \in I$. Existe entonces h tal que

$$D^{-1}L_{\lambda|_{h+1}}d \leq r < D^{-1}L_{\lambda|_h}d.$$

Por lo que resulta que

$$\begin{aligned}&B_r(x) \cap K \subseteq \varphi_{\lambda|_{h+1}}(K) \quad \text{y}\\ &L_{\lambda|_{h+1}}D^{-1}d \leq r\,,\end{aligned}$$

que son las condiciones *(i)* y *(ii)* de la parte A tomando ψ igual a la identidad y $\omega = \lambda|_{h+1}$. Luego se satisfacen las condiciones de la parte A con r_0 suficientemente chico y $a = D^{-1}d$.

■

En [F2], capítulos 4 y 5, se estudian conjuntos de distorsión acotada en la recta asociados a sistemas dinámicos discretos. De hecho la condición de distorsión acotada es crucial para poder estimar la dimensión de estos conjuntos. En [MU] se estudian conjuntos autosemejantes en $\mathbf{R}^n$ definidos por transformaciones conformes: existe un abierto $V \supset K$, tal que las transformaciones se extienden como C^2-difeomorfismos conformes sobre V (conformal iterated function systems). Más aún, se consideran conjuntos definidos por un conjunto infinito de transformaciones. Si bien este tipo de conjuntos no están incluidos dentro los casos que estamos estudiando en este trabajo, es importante aclarar que, aún en el caso infinito y por supuesto en el caso finito, son de distorsión acotada. En este caso las constantes L_ω son los supremos de las normas de las derivadas $|\varphi'_\omega(x)|$ tomados sobre V.

Con el objeto de encontrar cotas para $\mathcal{H}^s(K)$, modificamos la noción de conjunto ϵ-discreto, que aparece en [P2], para incorporar la distorsión que caracteriza el caso que estamos estudiando.

Definición. Diremos que un conjunto compacto K de dimensión s es **ϵ-discreto** si $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ y existe una familia finita $\{K_i\}_{i=1}^q$ tal que

i) $K = \bigcup_{i=1}^{q} K_i$ y $\mathcal{H}^s(K_i \cap K_j) = 0$ para todo $i \neq j$.

ii) $|K_i| \leq \epsilon$ para todo i.

iii) La relación entre la medida de K_i y K puede estimarse (en forma práctica). Más precisamente existen constantes positivas α_i, c_0, y c_1 tales que $c_0\alpha_i \leq \dfrac{\mathcal{H}^s(K_i)}{\mathcal{H}^s(K)} \leq c_1\alpha_i$, para todo i.

Dado K ϵ-discreto sea $\mathcal{P}$ la familia de todas las úplas $\{i_1, \ldots, i_t\}$ donde $1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq q$. Consideraremos las uniones de los conjuntos K_i, $\cup_{i\in p} K_i$ para $p \in \mathcal{P}$ y, con la ayuda de los α_i, podremos estimar la medida relativa de estos conjuntos. Nos interesa en particular, entre los conjuntos de este tipo, los de mayor densidad relativa. Dado $p \in \mathcal{P}$ sea $T(p) = \left|\cup_{i\in p} K_i\right|$, y dado $\delta > 0$ definimos la función $\mathcal{U}_\epsilon(\delta) = \max\limits_{T(p)\leq\delta} \sum\limits_{i\in p} \alpha_i$.

Queremos remarcar que α_i, c_0 y c_1 son constantes conocidas en forma práctica. Por ejemplo si K es el conjunto de Cantor usual, $K = \varphi_1(K) \cup \varphi_2(K) = K_1 \cup K_2$, entonces K es un conjunto 1/3-discreto donde $\mathcal{H}^s(K_i)/\mathcal{H}^s(K) = 1/2$, $i = 1, 2$.

Así la función $\mathcal{U}_\epsilon(\delta)$ es efectivamente computable y si conociéramos, también en forma práctica, constantes M y D_0 tales que $M \leq \sup\limits_{\delta\in[a,|K|]} f(\delta) \leq D_0$, entonces la fórmula (6) (abajo) daría cotas que aproximan la medida de K con tanta precisión como lo permitan las constantes c_0, c_1, M, D_0 y la capacidad computacional para calcular $\mathcal{U}_\epsilon(\delta)$. Volviendo al ejemplo del conjunto de Cantor tenemos en este caso que $M = D_0 = c_0 = c_1 = 1$ como resulta inmediatamente de la Proposición 3 y la parte C de la Proposición 4.

La siguiente Proposición indica de qué modo $\mathcal{U}_\epsilon(\delta)$ permite acotar $\mathcal{H}^s(K)$ en relación con $f(\delta)$ y es esencialmente equivalente al Teorema 5 de [P2].

Proposición 5. *Sea K ϵ-discreto, entonces*

1) $c_0\mathcal{U}_\epsilon(\delta) \leq \dfrac{f(\delta)\delta^s}{\mathcal{H}^s(K)} \leq c_1\mathcal{U}_\epsilon(\delta+2\epsilon)$ *para todo* $\delta > 0$.

2) *Si* K *es* ϵ*-discreto para todo* $\epsilon > 0$ *entonces, para todo* $a > 0$ *tenemos que*

$$\left(\sup_{\delta\in[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta+2\epsilon)}{\delta^s} - \sup_{\delta\in[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s}\right) \longrightarrow 0\,,$$

cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Demostración : Demostraremos la primer parte, el segundo enunciado se encuentra demostrado en [P2].

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(K)\,\mathcal{U}_\epsilon(\delta) &= \mathcal{H}^s(K)\max_{T(p)\leq\delta}\sum_{i\in p}\alpha_i \leq c_0^{-1}\max_{T(p)\leq\delta}\sum_{i\in p}\mathcal{H}^s(K_i), \quad \text{por iii) de la definición}\\ &\leq c_0^{-1}\max_{T(p)\leq\delta}\mathcal{H}^s(\cup_{i\in p}K_i) \leq c_0^{-1}\max_{T(p)\leq\delta} f(T(p))\,T(p)^s\,,\end{aligned}$$

por i) y la definición de T(p)

$$\leq c_0^{-1} f(\delta)\delta^s\,,$$

ya que $f(\delta)\delta^s$ es creciente. De aquí sigue la desigualdad izquierda de 1). Observar que si $\delta < \text{mín}\,|K_i|$, entonces $\mathcal{U}_\epsilon(\delta) = 0$ y la desigualdad anterior es trivial.

Para probar la otra parte sea G tal que $f(\delta)\delta^s = \mathcal{H}^s(K\cap G)$. Sea p el conjunto de todos los índices i tales que $K_i \cap G \neq \emptyset$. Tenemos que $T(p) = \left|\cup_{i\in p}K_i\right| \leq \delta + 2\epsilon$. Luego

$$\begin{aligned}f(\delta)\delta^s = \mathcal{H}^s(K\cap G) &\leq \mathcal{H}^s(\cup_{i\in p}K_i) \leq \sum_{i\in p}\mathcal{H}^s(K_i)\\ &\leq c_1\,\mathcal{H}^s(K)\sum_{i\in p}\alpha_i \leq c_1\,\mathcal{H}^s(K)\mathcal{U}_\epsilon(\delta+2\epsilon).\end{aligned}$$

∎

Sea $0 < a < |K|$. Tomando el supremo sobre $\delta \in [a, |K|]$ en la expresión 1) de la Proposición 5 surge que si K es ϵ-discreto entonces

(6)

$$c_1^{-1}\left(\sup_{[a,|K|]}\frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta+2\epsilon)}{\delta^s}\right)^{-1}\sup_{[a,|K|]} f(\delta) \leq \mathcal{H}^s(K) \leq c_0^{-1}\left(\sup_{[a,|K|]}\frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s}\right)^{-1}\sup_{[a,|K|]} f(\delta).$$

Luego si K satisface las condiciones (D1) y (D2), con $N(G) \leq D_0$, tenemos que

$$\mathcal{H}^s(K) \leq \left(c_0\sup_{[a,|K|]}\frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s}\right)^{-1}\cdot D_0\,,$$

ya que por el Teorema 1, $f(\delta) \leq D_0$.

Supongamos ahora que K es además ϵ-discreto para todo ϵ (asumimos que las constantes c_0 y c_1 de la definición son las mismas para todo ϵ). Definimos

$$\mathbf{U}_a := \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \sup_{[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s} = \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \sup_{[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta+2\epsilon)}{\delta^s}.$$

De (6) obtenemos

$$(c_1\,\mathbf{U}_a)^{-1} \sup_{[a,|K|]} f(\delta) \le \mathcal{H}^s(K) \le (c_0\,\mathbf{U}_a)^{-1} \sup_{[a,|K|]} f(\delta).$$

Como $\mathbf{U}_a$ está acotado superiormente para todo a y $\mathbf{U}_b \ge \mathbf{U}_a$ siempre que $b \le a$ es posible tomar el límite $\mathbf{U}_0 = \lim_{a\to 0} \mathbf{U}_a$ para obtener

$$(c_1\,\mathbf{U}_0)^{-1} \sup_{(0,|K|]} f(\delta) \le \mathcal{H}^s(K) \le (c_0\,\mathbf{U}_0)^{-1} \sup_{(0,|K|]} f(\delta).$$

Tenemos entonces lo siguiente:

Proposición 6. *Si K satisface las condiciones (D1) y (D2) con $N(G) \le D_0$ y es ϵ-discreto para todo ϵ entonces*

$$(c_1\,\mathbf{U}_0)^{-1} \le (c_1\,\mathbf{U}_0)^{-1} \sup_{(0,|K|]} f(\delta) \le \mathcal{H}^s(K) \le (c_0\,\mathbf{U}_0)^{-1} \sup_{(0,|K|]} f(\delta) \le (c_0\,\mathbf{U}_0)^{-1} D_0.$$

Demostración : Resulta directamente de la fórmula anterior, de la Proposición 1, y del Teorema 1 que implican $1 \le \sup_{(0,|K|]} f(\delta) \le D_0$. ∎

Si K es un conjunto autosemejante de distorsión acotada tenemos el siguiente resultado que, bajo ciertas condiciones, permite acotar la medida de K con tanta precisión como lo permitan la constante de distorsión D y la capacidad computacional para calcular $\mathcal{U}_\epsilon(\delta)$. Debe leerse teniendo en cuenta la Proposición 4 que da condiciones generales para que K sea (M,a)-contenido.

Teorema 2. *Si K es un conjunto de distorsión acotada tal que $\mathcal{H}^s(\varphi_i(K)\cap\varphi_j(K)) = 0$ para todo $i \ne j$ entonces K es ϵ-discreto para todo $\epsilon > 0$. Si además K es (M,a)-contenido tenemos que*

$$M\left(\sup_{[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta+2\epsilon)}{\delta^s}\right)^{-1} \le \mathcal{H}^s(K) \le D^{2s}\left(\sup_{[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s}\right)^{-1},$$

y

$$\left(\sup_{\delta\in[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta+2\epsilon)}{\delta^s} - \sup_{\delta\in[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s}\right) \longrightarrow 0,$$

cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Demostración : Para ver que K es ϵ-discreto consideremos la familia $\{\varphi_\omega(K)\}_{\omega\in I^k}$. Sabemos que $K = \cup_{\omega\in I^k}\varphi_\omega(K)$. Como φ_ω son contracciones, tomando k suficientemente grande tenemos que $|\varphi_\omega(K)| \le \epsilon$ para todo $\omega \in I^k$, que es la segunda condición de la definición. Sean $\omega, \lambda \in I^k$ dos palabras distintas y sea m el mayor índice tal que $\omega|_m = \lambda|_m$, por (DA) sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(\varphi_\omega(K)\cap\varphi_\lambda(K)) &= \mathcal{H}^s(\varphi_{\omega|_m}(\varphi_{\omega_{m+1}\cdots\omega_k}(K)\cap\varphi_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_k}(K)))\\ &\le L^s_{\omega|_m}\mathcal{H}^s(\,\varphi_{\omega_{m+1}}(\varphi_{\omega_{m+2}\cdots\omega_k}(K))\cap\varphi_{\lambda_{m+1}}(\varphi_{\lambda_{m+2}\cdots\lambda_k}(K))\,) = 0\,,\end{aligned}$$

ya que $\omega_{m+1} \neq \lambda_{m+1}$, luego se cumple la condición i) de la definición. La tercer condición se cumple con $\alpha_\omega = L^s_\omega$, $c_0 = D^{-s}$ y $c_1 = 1$ ya que por (DA)

$$D^{-s}L^s_\omega \le \frac{\mathcal{H}^s(\varphi_\omega(K))}{\mathcal{H}^s(K)} \le L^s_\omega.$$

Si además K es (M,a)-contenido sigue directamente de la fórmula (6) y la Proposición 3 las cotas enunciadas para $\mathcal{H}^s(K)$. ∎

Observar que si $D = 1$ i.e. K está definido por similitudes entonces, bajo ciertas condiciones en las que K es $(1, a)$-contenido, como las enunciadas en la Proposición 4, el teorema anterior da una forma de aproximar $\mathcal{H}^s(K)$ (cf. [P2], sección 3).

3 Conjuntos grafo dirigidos.

Extenderemos, en esta sección , parte de la teoría desarrollada en la sección anterior. Prestaremos especial atención a los conjuntos grafo dirigidos definidos por similitudes, y veremos que en este caso y bajo ciertas condiciones, es posible desarrollar un algoritmo teórico práctico que **aproxime** la medida de K. En algunos casos, partes de las demostraciones son copias textuales de las ya dadas anteriormente y se dejan al lector.

Un grafo dirigido (V, I) está compuesto por un conjunto de vértices $V = \{1, \ldots, m\}$, y un conjunto de flechas I en donde cada flecha $i \in I$ une los vértices $p(i)$ y $\ell(i)$. Notaremos con $I_{v,j}$ al conjunto de las flechas que se dirigen del vértice v al j y con I^n al conjunto de cadenas de longitud n, esto es $\omega = \omega_1 \ldots \omega_n$ donde $\ell(\omega_{j-1}) = p(\omega_j)$. Escribimos igual que antes $I^* = \cup_{n\ge1} I^n$.

Decimos que un conjunto compacto K es **grafo dirigido** [F2, E] si existen conjuntos compactos $K = K_1, \ldots, K_m$, un grafo dirigido (V, I), con m vértices, y contracciones $\varphi_i : K_{\ell(i)} \to K_{p(i)}$, una para cada flecha $i \in I$, tal que para cada $v \in V$ vale

$$K_v = \bigcup_{\substack{i\in I\\ p(i)=v}} \varphi_i(K_{\ell(i)}) = \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i\in I_{v,j}} \varphi_i(K_j)$$

En particular, para $K = K_1$, tenemos para todo n:

$$K = \bigcup_{\substack{\omega\in I^n\\ p(\omega)=1}} \varphi_\omega(K_{\ell(\omega)}) \tag{7}$$

Un grafo dirigido se dice **transitivo** si para cada par de vértices v, j existe una cadena de flechas $\omega \in I^*$, que los une, esto es: $p(\omega) = v$ y $\ell(\omega) = j$.

En lo que sigue supondremos que K satisface una condición algo más fuerte que la mera transitividad. Esto nos permitirá descartar transformaciones muy singulares y recuperar los cubrimientos de Vitali de la Proposición 2 y el Teorema 1 para poder generalizar la teoría anterior a este tipo de conjuntos. Sea s la dimensión de K, decimos que K cumple la condición $(D0)$ si se satisface lo siguiente:

(D0) K es un s-conjunto, $0 < \mathcal{H}^s(K_v) < \infty$ para todo $v \in V$ y para cada vértice v existe una cadena h_v que une v con 1 tal que $\mathcal{H}^s(\varphi_{h_v}(K)) > 0$.

Esta condición se cumple, por ejemplo, si las transformaciones φ_i son bi-Lipschitz, suponiendo que K sea un s-conjunto.

Consideraremos ahora las condiciones análogas a (D1) y(D2):

(D1') Para todo $v \in V$ y todo compacto G con $\mathcal{H}^s(G \cap K_v) > 0$ existe una constante $M(G)$ tal que

$$|\varphi_\omega(K_v)| \leq M(G).|\varphi_\omega(G \cap K_v)|$$

para todo $\omega \in I^*$ con $\ell(\omega) = v$.

(D2') Para todo $v \in V$ y todo compacto convexo G con $\mathcal{H}^s(G \cap K_v) > 0$ existe una constante $N(G)$ tal que

$$\mathcal{H}^s(\varphi_\omega(G \cap K_v)) \geq \frac{1}{N(G)} \cdot \frac{\mathcal{H}^s(G \cap K_v)}{|G \cap K_v|^s} \cdot |\varphi_\omega(G \cap K_v)|^s$$

para todo $\omega \in I^*$ con $\ell(\omega) = v$.

Igual que antes consideraremos el conjunto $A(G)$ que ahora redefinimos de la siguiente manera:

$$A_n(G) := \bigcup_{\substack{|\omega| \geq n \\ p(\omega) = \ell(\omega) = 1}} \varphi_\omega(G \cap K) \qquad y \qquad A(G) := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(G).$$

Tenemos el análogo del Teorema 1 en el siguiente teorema:

Teorema 3. *Supongamos que K es un conjunto grafo dirigido que verifica las condiciones (D0), (D1') y (D2'). Entonces $\frac{\mathcal{H}^s(G \cap K)}{|G|^s} \leq N(G)$ para todo compacto convexo G. En particular, si $N(G) \leq D_0$ para todo G resulta que $f(\delta) \leq D_0$ para todo $\delta > 0$.*

Demostración : Sea G_0 compacto convexo tal que $\mathcal{H}^s(G_0 \cap K) > 0$. Probaremos que $\mathcal{H}^s(A(G_0)) > 0$ de manera análoga a lo hecho en la demostración de la Proposición 2.

Supongamos que $\mathcal{H}^s(A(G_0)) = 0$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe un n_0 de modo que $\mathcal{H}^s(A_{n_0}(G_0)) \leq \epsilon$. De la fórmula (7) resulta que la familia $\mathcal{F} = \{\varphi_\omega(K_{\ell(\omega)})\}_{\substack{|\omega| \geq n_0 \\ p(\omega)=1}}$ es un cubrimiento de Vitali de K.

Además, para todo $v \in V$ existe una cadena h_v tal que $\varphi_{h_v}(K) \subseteq K_v$ y $\mathcal{H}^s(\varphi_{h_v}(K)) > 0$. Luego, aplicando (D1') con $G = \varphi_{h_v}(K)$

$$|\varphi_\omega(K_v)| \le M(\varphi_{h_v}(K))|\varphi_\omega(\varphi_{h_v}(K) \cap K_v)| = M(\varphi_{h_v}(K))|\varphi_{\omega h_v}(K)|\,,$$

para todo $\omega \in I^*$ con $\ell(\omega) = v$. Tomemos $M = \max\{M(\varphi_{h_v}(K))\}$ y sea $N'(G_0) = \frac{N(G_0)|G_0\cap K|^s}{\mathcal{H}^s(G_0\cap K)}$.

Existe entonces una subfamilia $\{\varphi_\omega(K_{\ell(\omega)})\}_{\omega\in Q}$, numerable y disjunta de $\mathcal{F}$, tal que

$$\mathcal{H}^s(K) - \epsilon \le \sum_{\omega\in Q} |\varphi_\omega(K_{\ell(\omega)})|^s \le M^s \sum_{\omega\in Q} |\varphi_{\omega h_{\ell(\omega)}}(K)|^s$$

escribiremos directamente ωh, en lugar de $\omega h_{\ell(\omega)}$ para simplificar la notación,

$$\begin{aligned}
&\le M^s\, M(G_0)^s \sum_{\omega\in Q} |\varphi_{\omega h}(G_0 \cap K)|^s && \text{por (D1')}\\
&\le M^s M(G_0)^s N'(G_0) \sum_{\omega\in Q} \mathcal{H}^s(\varphi_{\omega h}(G_0 \cap K)) && \text{por (D2')}\\
&\le M^s M(G_0)^s N'(G_0)\; \mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{\omega\in Q} \varphi_{\omega h}(G_0 \cap K)\Big)\\
&\le M^s M(G_0)^s N'(G_0)\; \mathcal{H}^s(A_{n_0}(G_0)) \le M^s M(G_0)^s N'(G_0)\; \epsilon\,,
\end{aligned}$$

ya que $|\omega h| \ge |\omega| \ge n_0$ y $\ell(\omega h) = \ell(h) = 1$. Luego debe ser $\mathcal{H}^s(K) = 0$ que es una contradicción.

La demostración que $\frac{\mathcal{H}^s(G_0\cap K)}{|G_0|^s} \le N(G_0)$ es análoga a la dada en el Teorema 1 y se deja al lector. ■

Recordando lo desarrollado en la parte anterior respecto de los conjuntos ϵ-discretos obtenemos el siguiente resultado semejante a la Proposición 6. Su comprobación es inmediata y se deja al lector.

Proposición 7. *Sea K un conjunto grafo dirigido que satisface las condiciones (D0), (D1') y (D2') con $N(G) \le D_0$ y es ϵ-discreto para todo ϵ. Entonces*

$$(c_1\, \mathrm{U}_0)^{-1} \le (c_1\, \mathrm{U}_0)^{-1} \sup_{(0,|K|]} f(\delta) \le \mathcal{H}^s(K) \le (c_0\, \mathrm{U}_0)^{-1} \sup_{(0,|K|]} f(\delta) \le (c_0\, \mathrm{U}_0)^{-1} D_0.$$

Si las transformaciones φ_ω satisfacen la condición (DA), es decir, existen constantes positivas D y L_ω tales que

$$D^{-1}L_\omega|x-y| \le |\varphi_\omega(x) - \varphi_\omega(y)| \le L_\omega|x-y|\,,$$

para cualquier $\omega \in I^*$ y $x, y \in K_{\ell(\omega)}$, entonces diremos que K es un conjunto **grafo dirigido de distorsión acotada**. Observar que si esto pasa las transformaciones

φ_i son bi-Lipschitz, luego un s-conjunto grafo dirigido de distosión acotada satisface la condición $(D0)$. Puede verse, de la misma manera que anteriormente lo hemos hecho que, en este caso, K satisface las condiciones (D1') y (D2') con $N(G) = D^s$ para todo G compacto convexo. En particular resulta inmediatamente del Teorema 3 lo siguiente:

Proposición 8. *Sea K un conjunto grafo dirigido de distorsión acotada, entonces $f(\delta) \leq D^s$ para todo $\delta > 0$.*

En lo que resta de esta sección nos concentraremos en el caso de que K sea un conjunto grafo dirigido definido por similitudes i.e. K es un conjunto de distorsión acotada con $D = 1$. Supondremos además que $\mathcal{H}^s(\varphi_i(K_{\ell(i)}) \cap \varphi_j(K_{\ell(j)})) = 0$ para todo par de flechas $i \neq j$. Esta última condición se satisface por ejemplo si K cumple una condición de conjunto abierto [YHK, pag 21].

Probaremos primero que K es ϵ-discreto para todo ϵ. Obteniendo un resultado análogo al Teorema 2

Teorema 4. *Si K es un conjunto grafo dirigido definido por similitudes tal que $\mathcal{H}^s(\varphi_i(K_{\ell(i)}) \cap \varphi_j(K_{\ell(j)})) = 0$ para todo par de flechas $i \neq j$, entonces K es ϵ- discreto para todo $\epsilon > 0$. Si además K es (M,a)-contenido tenemos que*

$$M \left(\sup_{[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta + 2\epsilon)}{\delta^s} \right)^{-1} \leq \mathcal{H}^s(K) \leq \left(\sup_{[a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s} \right)^{-1}$$

y

$$\left(\sup_{\delta \in [a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta + 2\epsilon)}{\delta^s} - \sup_{\delta \in [a,|K|]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s} \right) \longrightarrow 0 \,,$$

cuando $\epsilon \to 0$.

Demostración : De (7) resultan las condiciones i) y ii) de la definición de conjunto ϵ- discreto (cf. con la demostración del Teorema 2). Para ver que se cumple iii) debemos recordar algunas cosas que sabemos sobre los conjuntos grafo dirigidos, nos referiremos en general a resultados enunciados en [F2] y [F3].

Para $\sigma > 0$ sea $A^{(\sigma)}$ la matriz no negativa con entradas $A^{(\sigma)}_{kj} = \sum_{i \in I_{k,j}} r_i^\sigma$, donde r_i es el radio de φ_i. Sabemos que s, la dimensión de K, es el que hace el radio espectral de $A^{(s)}$ igual a 1, y que el vector $(\mathcal{H}^s(K), \mathcal{H}^s(K_2), \ldots, \mathcal{H}^s(K_m))$ es un autovector de $A^{(s)}$ asociado a 1. Como el grafo es transitivo la matriz $A^{(s)}$ es irreducible, luego por el Teorema de Perron-Frobenius para matrices no negativas, el radio espectral de $A^{(s)}$ es un autovalor simple [BFP]. Tenemos entonces que $\mathcal{H}^s(K_v) = x_v \mathcal{H}^s(K)$ para todo $v \geq 2$ donde $(1, x_2, \ldots, x_m)$ es el único autovector asociado a 1 con la primer coordenada igual a 1. Luego

$$\frac{\mathcal{H}^s(\varphi_\omega(K_{\ell(\omega)}))}{\mathcal{H}^s(K)} = r_\omega^s \frac{\mathcal{H}^s(K_{\ell(\omega)})}{\mathcal{H}^s(K)} = r_\omega^s x_{\ell(\omega)} \,,$$

de lo que resulta la condición iii) de la definición con $c_0 = c_1 = 1$ y $\alpha_\omega = r_\omega^s x_{\ell(\omega)}$.

La desigualdad enunciada resulta ahora de la fórmula (6) y del hecho de que $M \leq \sup_{[a,|K|]} f(\delta) \leq 1$ por ser K (M,a)-contenido y definido por similitudes. ∎

Daremos ahora una condición suficiente para que un conjunto grafo dirigido definido por similitudes sea (1,a)-contenido, siendo este el caso en que la fórmula anterior permite estimar, tanto como lo permita la capacidad computacional, la medida de K. Esta condición es del tipo de las expuestas en la Proposición 4 de este trabajo y del tipo de la Property A en [P2].

Proposición 9. *Sea K un conjunto grafo dirigido definido por similitudes. Supongamos que existe $a > 0$ tal que para todo $r < a$ y toda bola cerrada B_r centrada en K existe una similitud ψ de radio $\rho \geq 1$ de modo que $\psi(B_r \cap K) \subseteq \varphi_\omega(K)$ para algún $\omega \in I^*$, con $p(\omega) = \ell(\omega) = 1$. Entonces K es (1,a)-contenido.*

Demostración : Veremos primero que para cualquier compacto convexo G con $|G| < a$ existe una similitud ϕ tal que $\phi(G \cap K) \subseteq K$ y $|\phi(G \cap K)| \geq a$. En efecto, por hipótesis existen ψ, ω tales que $\varphi_\omega^{-1} \circ \psi(G \cap K) \subseteq K$ y

$$|\varphi_\omega^{-1} \circ \psi(G \cap K)| \geq r_\omega^{-1} \rho |G \cap K| \geq (\max r_i)^{-1} |G \cap K|\,,$$

luego si $|\varphi_\omega^{-1} \circ \psi(G \cap K)| < a$ puede repetirse este proceso hasta que se cumpla lo expresado.

Sea entonces $\delta_0 < a$ y G un compacto convexo tal que $f(\delta_0) = \frac{\mathcal{H}^s(G\cap K)}{|G|^s}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(|\phi(G \cap K)|) &\geq \frac{\mathcal{H}^s(\phi(G \cap K) \cap K)}{|\phi(G \cap K)|^s} = \frac{\mathcal{H}^s(\phi(G \cap K))}{|\phi(G \cap K)|^s} \\ &\geq \frac{\mathcal{H}^s(G \cap K)}{|G \cap K|^s} \geq \frac{\mathcal{H}^s(G \cap K)}{|G|^s} = f(\delta_0). \end{aligned}$$

Donde $|\phi(G \cap K)| \geq a$. Como esto es cierto para todo $0 < \delta_0$ resulta que K es $(1, a)$-contenido. ■

4 Ejemplo: triángulo de Sierpinski grafo dirigido.

En esta sección daremos algunas cotas numéricas sobre la medida de un conjunto grafo dirigido en el plano que es una modificación del triángulo de Sierpinski. Todas las aproximaciones numéricas expresadas son exactas hasta la quinta cifra decimal.

El triángulo de Sierpinski es un conjunto autosemejante muy conocido asociado a tres similitudes φ_1, φ_2, φ_3. Si Δ es el triángulo equilátero determinado por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1/2, \sqrt{3}/2)$; estas transformaciones contraen Δ sobre cada uno de sus vértices con radio $1/2$. Consideraremos los conjuntos grafo dirigidos asociados al grafo de la Figura 1. Notaremos con TR al conjunto asociado al nodo de la izquierda y con TR_2 al conjunto asociado al nodo de la derecha, tenemos entonces que $TR = \varphi_1(TR) \cup \varphi_2(TR_2) \cup \varphi_3(TR_2)$ y $TR_2 = \varphi_1(TR) \cup \varphi_3(TR_2)$.

Como sabemos la dimensión de TR, s, es tal que el radio espectral de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ a & a \end{pmatrix}, \qquad \text{donde } a = (1/2)^s,$$

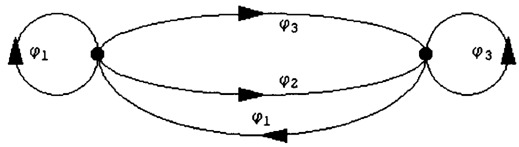

Figura 1: grafo dirigido asociado a TR.

es 1. Tenemos entonces que $a = \sqrt{2} - 1$ es la raíz positiva del polinomio $x^2 + 2x - 1$; $s = \frac{\log(\sqrt{2}-1)}{\log 1/2} \approx 1,27155$; y la relación entre $\mathcal{H}^s(TR)$ y $\mathcal{H}^s(TR_2)$ está dada por

$$\mathcal{H}^s(TR_2) = \frac{a}{1-a}\,\mathcal{H}^s(TR) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{H}^s(TR).$$

Vimos también que este tipo de conjuntos es ϵ-discreto para todo ϵ.

Veremos ahora que TR es $(1, 1/16)$-contenido. Para esto es conveniente tener presente las clausuras convexas de los conjuntos TR y TR_2; y observar que en este caso $TR_2 \subseteq TR$. Es simple comprobar que la clausura convexa de TR coincide con el cuadrilátero determinado por los puntos $(0,0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(3/4, \sqrt{3}/4)$ y $(2/3, 0)$; mientras que la clausura convexa de TR_2 coincide con el triángulo determinado por los puntos $(0,0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$ y $(1/3, 0)$.

Proposición 10. *TR es $(1, 1/16)$-contenido.*

Demostración : Usaremos la Proposición 9 de la siguiente manera: para toda bola cerrada B_r, centrada en TR, $r < 1/16$, mostraremos una similitud ψ de radio 1 tal que $\psi(B_r \cap TR) \subseteq \varphi_1(TR)$. Recordar que $TR = \varphi_1(TR) \cup \varphi_2(TR_2) \cup \varphi_3(TR_2)$. Si $B_r \cap TR \subseteq \varphi_1(TR)$ entonces ψ es la transformación identidad. Si $B_r \cap TR \subseteq \varphi_2(TR_2)$, tomamos $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$; y de igual modo si $B_r \cap TR \subseteq \varphi_3(TR_2)$, tomamos $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$. Teniendo en cuenta las clausuras convexas de TR y TR_2 puede verse que la distancia entre $\varphi_1(TR)$ y $\varphi_2(TR_2)$ es mayor que $1/16$ y no existe B_r, centrada en TR, que intersecte $\varphi_1(TR)$ y $\varphi_2(TR_2)$ a la vez. Lo mismo pasa entre $\varphi_2(TR_2)$ y $\varphi_3(TR_2)$. Es simple ver además que si B_r intersecta $\varphi_1(TR)$ y $\varphi_3(TR_2)$, entonces $B_r \cap TR$ debe estar incluido en $\varphi_{133}(TR_2) \cup \varphi_{311}(TR)$, en este caso tomamos como ψ la traslación que lleva los conjuntos $\varphi_{133}(TR_2) \cup \varphi_{311}(TR)$ en los conjuntos congruentes $\varphi_{113}(TR_2) \cup \varphi_{131}(TR) \subseteq \varphi_1(T_1)$. Ver Figura 2. ■

Usando ahora la fórmula del Teorema 4 podemos estimar la medida de TR calculando $\sup\limits_{[1/16,1]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta + 2\epsilon)}{\delta^s}$ y $\sup\limits_{[1/16,1]} \frac{\mathcal{U}_\epsilon(\delta)}{\delta^s}$, donde ϵ depende de la longitud n con que se tomen las sucesiones ω para cubrir TR con $\varphi_\omega(TR_{\ell(\omega)})$. Hay una dificultad computacional en este proceso ya que se trata de encontrar supremos sobre conjuntos de cardinalidad del orden de $2^{(3^n)}$. Con un sencillo algoritmo hemos podido efectuar los cálculos para $n = 3$, o sea $\epsilon = \frac{1}{8}$. Los resultados obtenidos fueron

$$\sup_{[1/16,1]} \frac{\mathcal{U}_{1/8}(\delta)}{\delta^s} \approx 1,13506 \ , \quad \sup_{[1/16,1]} \frac{\mathcal{U}_{1/8}(\delta + 1/4)}{\delta^s} \approx 5,82842 \, ,$$

y la medida de TR queda entonces acotada por: $0,171 \leq \mathcal{H}^s(TR) \leq 0,881$.

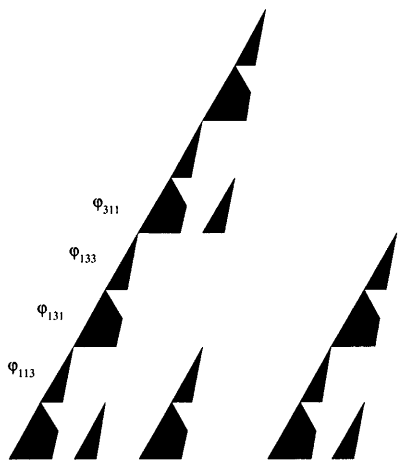

Figura 2: TR cubierto por conjuntos de diámetro $1/8$

Referencias

[BFP] A. Benedek, E. Fernandez Stacco, R. Panzone (1994), Matrices no negativas. *Informe Técnico Interno n^o35*, Instituto de Matemática de Bahía Blanca.

[D] R.L. Devaney (1989), *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[E] G.A. Edgar (1990), *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Spriger-Verlag.

[F1] K. Falconer (1985), *The geometry of fractal sets*, Cambrige Univ. Press.

[F2] K. Falconer (1997), *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons.

[F3] K. Falconer (1989), Dimensions and measures of quasi self-similar sets, *Proc. A.M.S.* **106**,543-554.

[H] J.E. Hutchinson (1981), Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30**, 713-747.

[MU] R.D. Mauldin, M. Urbańsky (1996), Dimensions and measures in infinite iterated function sistems, *Proc. London Math. Soc* (3) **73**, 105-154.

[P1] P. Panzone (1992), On the measure of self-similar sets, *Rev. de la UMA* **38**, 48-87.

[P2] P. Panzone (1996), On the measure of self-similar sets II, *Rev. de la UMA* **40**, 83-100.

[YHK] M. Yamaguti, M. Hata, J. Kygami (1997), *Mathematics of Fractals*, Univ. Bangalore Press.

Mariano Ferrari
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur,
Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: mferrari@criba.edu.ar

Recibido: 27 de junio de 2002
Aceptado: 23 de octubre de 2003