

# ÁLGEBRA HOMOLÓGICA Y ÁLGEBRAS DE HOPF

**Autores:** Gastón Andrés García  
**Lugar:** Universidad Nacional de Córdoba

---

## FAMILIAS INFINITAS DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Usando algunos resultados generales sobre sucesiones exactas de álgebras de Hopf, se construirá una familia infinita de álgebras de Hopf de dimensión finita, que son no semisimples, no punteadas y cuyos duales tampoco son punteados. Dichas álgebras de Hopf resultan ser el cociente finito del álgebra de funciones cuantizada  $\mathcal{O}_q(G)$  en una raíz de la unidad  $q$ , sobre un grupo de Lie  $G$  conexo, simplemente conexo y semisimple sobre  $\mathbb{C}$ .

---

**Autores:** César Galindo, Sonia Natale  
**Lugar:** Fa.M.A.F. UNC-CIEM Conicet

---

## ÁLGEBRAS DE HOPF SIMPLES Y DEFORMACIONES POR TWISTING

Muchos de los ejemplos conocidos de álgebras de Hopf semisimples provienen de las álgebras de grupo y sus duales mediante combinaciones de los siguientes dos métodos: uno es el de deformación por twisting y el otro es por medio de extensiones. En este sentido las álgebras de Hopf simples son los bloques elementales, pues toda álgebra de Hopf de dimensión finita puede construirse por extensiones sucesivas a partir de álgebras de Hopf simples.

Si  $G$  es un grupo finito simple, toda deformación por twisting de su álgebra de grupo es un álgebra de Hopf simple que es semisimple como álgebra [Nikshych,  *$K_0$ -Rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Commun. Alg. **26** (1998), 321–342]. El ejemplo más pequeño de un álgebra de Hopf simple es una deformación por twisting del grupo simple  $A_5$  de orden 60.

Mostraremos ejemplos de álgebras de Hopf simples, las cuales son deformaciones del grupo simétrico  $S_n$ ,  $n \geq 5$ . Mostraremos también un álgebra de Hopf simple construida a partir de una deformación de un grupo supersoluble de orden 60. Finalmente, se mostrará que toda deformación por twisting de un grupo nilpotente no es simple, más aún puede construirse por extensiones a partir de álgebras de grupo.

En particular, se deduce que la simplicidad de un álgebra de Hopf semisimple no está determinada por su categoría tensorial de representaciones.

---

## SOBRE LOS ESTABILIZADORES DE YAN-ZHU

En el estudio de un grupo finito  $G$  actuando sobre un conjunto  $X$ , el estabilizador  $G_x$  de un punto  $x \in X$  cumple un papel importante.

Los *estabilizadores de Yan-Zhu* fueron introducidos en [YZ] con el objetivo de estudiar acciones de álgebras de Hopf generalizando las acciones de grupos finitos. Si  $H$  es un álgebra de Hopf,  $K$  es un  $H$ -comódulo álgebra y  $V$  un  $K$ -módulo el estabilizador de Yan-Zhu se denota por  $\text{Stab}_K(V)$ . Aquí el comódulo álgebra reemplaza al conjunto  $X$  y el  $K$ -módulo  $V$  juega el rol del punto  $x$ .

En esta charla mostraremos cómo se calcula el estabilizador de Yan-Zhu cuando  $K$  es una extensión Hopf-Galois. También mostraremos que si  $K$  no posee ideales biláteros  $H$ -coestables entonces

$$\dim K \dim \text{Stab}_K(V) = (\dim V)^2 \dim H.$$

Esta fórmula fue probada por Zhu asumiendo que  $H$  es semisimple. Para la prueba de esta fórmula usamos resultados importantes sobre la proyectividad de comódulo álgebras obtenidos por Skryabin.

También se mostrará cómo el estabilizador de Yan-Zhu es una herramienta fundamental en el estudio de los módulos sobre la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf. Obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 0.1.** *Si  $\mathcal{M}$  es una categoría módulo indescomponible sobre  $\text{Rep}(H)$  entonces  $\mathcal{M} \simeq_{\text{Stab}_K(V)} \mathcal{M}$  para algún  $H$ -módulo álgebra  $K$   $H$ -simple.*

## REFERENCIAS

- [AM] N. ANDRUSKIEWITSCH and J.M. MOMBELLI, *Module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, en preparación.
- [YZ] M. YAN and Y. ZHU, *Stabilizer for Hopf algebra actions*, Comm. Alg. 26 **12**, 3885–3898 (1998).
- [Z] Y. ZHU, *The dimension of irreducible modules for transitive module algebras*, Comm. Alg. 29 **7**, 2877–2886 (2001).

## SOBRE ÁLGEBRAS DE HOPF PUNTEADAS ASOCIADAS A CLASES DE CONJUGACIÓN PURAS EN $\mathbb{S}_n$

Sea  $G$  un grupo finito no abeliano. Este trabajo es una contribución a la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita  $H$  cuyo grupo de *elementos tipo grupo*  $G(H)$  es isomorfo a  $G$ , en el contexto del *Método del Levante* (Andruskiewitsch - Schneider). Para ello, es necesario determinar todos los módulos de Yetter-Drinfeld  $V$  sobre el álgebra de grupo de  $G$  tales que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(V)$  es de dimensión finita. Los módulos irreducibles de Yetter-Drinfeld sobre  $\mathbb{C}G$  están parametrizados (salvo isomorfismos) por pares  $(\mathcal{C}, \rho)$ , donde  $\mathcal{C}$  es una clase de conjugación de  $G$  y  $\rho$  es una representación irreducible del centralizador  $G^s$  de un elemento  $s$  en  $\mathcal{C}$  fijo. Diremos que  $M(\mathcal{C}, \rho)$  es el módulo de Yetter-Drinfeld correspondiente a  $(\mathcal{C}, \rho)$  y  $\mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho)$  su álgebra de Nichols. Aquí consideramos  $G = \mathbb{S}_n$ , el grupo simétrico en  $n$  letras, y  $s$  en  $\mathbb{S}_n$  *puro*, i.e.  $s$  es un producto de ciclos disjuntos de la misma longitud. Diremos que la trenza es *negativa* si  $\mathfrak{B}(U) = \bigwedge(U)$ , el álgebra exterior de  $U$ , para todo subespacio trenzado de tipo diagonal  $U$  de  $M(\mathcal{C}, \rho)$ .

**Teorema.** *Sea  $\pi \in \mathbb{S}_{kn}$  puro de tipo  $(k^n)$ .*

- (A) *Si  $k$  es impar, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ .*
- (B) *Sea  $k = 2$ . (i) Si  $n$  es par, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ .*  
*(ii) Supongamos  $n$  impar. Si  $\rho = \chi_{(n)} \otimes \epsilon$  ó  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$ , entonces la trenza es negativa. En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ .*
- (C) *Asumamos  $k = 2r$ ,  $r > 1$ . (i) Sea  $n = 1$ . Si  $\omega = -1$  entonces la trenza es negativa, y si  $\omega \neq -1$  entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \chi_\omega) = \infty$ .*  
*(ii) Sea  $n > 1$ . Si  $r$  impar y  $\rho = \chi_{r, \dots, r} \otimes \text{sgn}^\delta$ ,  $\delta = 0$  ó  $1$ , ó si  $r$  par y  $\rho = \chi_{c, \dots, c} \otimes \text{sgn}^\delta$ ,  $\delta = 0$  ó  $1$ , y  $c = r$ ,  $\frac{r}{2}$  ó  $\frac{3r}{2}$ , entonces la trenza es negativa. En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ .*

COMPONENTES DEL CARCAJ DE AUSLANDER-REITEN CON DESVÍOS SECCIONALES.

Consideramos  $A$  un álgebra de artin y estudiamos la existencia de un desvío de una flecha en las componentes del carcaj de Auslander-Reiten. Decimos que existe un desvío de una flecha de  $i$  a  $j$ , si existe un camino paralelo a la flecha  $i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow j$  de longitud mayor que uno, con  $i \neq i_{n-1}$  y  $i_1 \neq j$ .

La noción de desvío de una flecha, ya había sido considerada por Crawley-Boevey, Happel y Ringel en 1987. Ellos probaron que si existe un desvío de una flecha en una componente que no posee ciclos orientados entonces el desvío es seccional.

Dado un morfismo irreducible entre módulos indescomponibles, es conocido que su núcleo es un módulo indescomponible. Si la dimensión del espacio de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles dados es 1, es natural preguntarse si los núcleos de estos morfismos son isomorfos. La existencia de los mencionados desvíos seccionales hace que no necesariamente lo sean.

Estamos interesados en saber en que componentes del carcaj de Auslander-Reiten se encuentran estos desvíos. El resultado principal que obtuvimos es el siguiente: Si una componente del carcaj de Auslander-Reiten contiene un desvío seccional de una flecha entonces dicho desvío se encuentra sobre una sección de una componente conexa infinita de la parte estable a izquierda o estable a derecha de la componente dada.

Aplicamos los resultados obtenidos a álgebras inclinadas, shod, débilmente shod y lauras.

A DESCRIPTION OF HEREDITARY SKEW GROUP ALGEBRAS OF FINITE AND TAME REPRESENTATION TYPE

In this work we assume that  $\Lambda$  is a finite-dimensional algebra over an algebraically closed field  $k$ . Let  $G$  a finite group acting on  $\Lambda$ . The *skew group algebra*  $\Lambda[G]$  is the free left  $\Lambda$ -module with basis all the elements in  $G$  and multiplication given by  $(\lambda g)(\mu h) = \lambda g(\mu)gh$  for all  $\lambda, \mu$  in  $\Lambda$ ,  $g, h$  in  $G$ . We study the skew group algebra  $\Lambda[G]$  when  $G$  is a finite group acting on  $\Lambda$  whose order is invertible in  $\Lambda$ .

The aim of this paper is to describe all possible actions of a finite abelian group on an hereditary algebra of finite or tame representation type and to give a description of the skew group algebra for each action. Gabriel has shown that a connected hereditary algebra is of finite representation type if and only if the underlying graph of its quiver is one of the Dynkin diagrams  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$  or  $E_8$ ; some years later it was shown that a connected hereditary algebra is of tame representation type if and only if the underlying graph of its quiver is one of the euclidean diagrams  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 1$ ),  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ),  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  or  $\tilde{E}_8$ . Then, in order to classify the finite and tame representation type hereditary skew group algebras, it suffices to study the group actions on the Dynkin and the euclidean quivers. In order to do this description, we start by considering a short exact sequence of groups  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow T \rightarrow 1$ . We can express  $\Lambda[G]$  in terms of the skew group algebra  $\Lambda[H][T]$  or the crossed product algebra  $\Lambda[H] *_\gamma T$ . In this context, we describe when  $\Lambda[G]$  is isomorphic to  $\Lambda[H][T]$ , for  $G$  a finite group whose order is invertible in  $\Lambda$ . In each one of the cases when the associated quiver is  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ),  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  or  $\tilde{E}_8$ , we get a connection between  $\Lambda[G]$  and the crossed product algebra  $\Lambda[H] * G/H$  with a complete description of all the possible groups  $G/H$  appearing in each case, where  $H$  is the subgroup of  $G$  consisting on all the elements acting trivially on a complete set of primitive orthogonal idempotents of the algebra  $\Lambda$ . As a consequence of all these results, we get that if  $H$  acts trivially on  $\Lambda$  then the crossed product algebras obtained in each description are skew group algebras.

---

**Autores: María Inés Peña - Sonia Trepode**  
**Lugar: Mar del Plata**

---

### ÁLGEBRAS DE DIMENSIÓN HOMOLÓGICA PEQUEÑA

Consideramos álgebras de artin y sus categorías de módulos a izquierda finitamente generados. La parte de la izquierda de la categoría de módulos es la subcategoría plena cuyos objetos son los módulos indescomponibles con dimensión proyectiva menor o igual que uno, tal que todo predecesor también tiene dimensión proyectiva menor o igual que uno. Dualmente se define la parte de la derecha.

Las álgebras de dimensión homológica pequeña (shod), son las álgebras de artin de dimensión global menor o igual que tres cuyos módulos indescomponibles tienen dimensión proyectiva o dimensión inyectiva menor o igual que uno. En esta charla daremos una caracterización de las álgebras de dimensión homológica pequeña a través de propiedades de los Ext-inyectivos de la parte de la izquierda y los Ext-proyectivos de la parte de la derecha de dichas álgebras.

---

**Autores: Isabel Pratti, Elsa Fernandez, Sonia Trepode**  
**Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata**

---

### ÁLGEBRAS INCLINADAS DE CONGLOMERADO

Las categorías de conglomerado (clusters) asociadas a un álgebra hereditaria de dimensión finita sobre un cuerpo fueron introducidas Buan, Marsh, Reineke, Reiten y Todorov como una forma de interpretar los elementos esenciales que llevan a la definición de un álgebra de conglomerado, desarrollando para ello en estas categorías una teoría de la inclinación. El álgebra de endomorfismos de un objeto inclinante en la categoría de conglomerado es una  $k$ -álgebra de dimensión finita, denominada inclinada de conglomerado. Existe una estrecha relación entre las álgebras inclinadas y las álgebras inclinadas de conglomerado. Assem, Brustle y Schiffler demostraron que el álgebra inclinada de conglomerado es una extensión por relaciones del álgebra inclinada, esto es, un caso especial de extensión excindida. En esta charla consideraremos un álgebra  $A$  inclinada de conglomerado de tipo de representación finita, o minimal de tipo de representación infinita. Probamos el siguiente resultado, si consideramos el ideal  $W$  de  $A$  que consiste en cortar exactamente una flecha de cada ciclo de  $A$ , obtenemos un álgebra  $B = A/W$ , tal que  $A$  es una extensión excindida de  $B$ . Damos condiciones necesarias y suficientes sobre  $W$  para que  $A$  sea una extensión por relaciones de  $B$ .

---