Análisis Funcional y Complejo

Autores: González, Víctor - Rodríguez, Mabel
Lugar: U. N. Gral. Sarmiento - Instituto del Desarrollo Humano. Bs. As.

Una descripción de la deficiencia convexa de un compacto en términos de elementos de Visibilidad Afín

Este trabajo corresponde al área de Convexidad Generalizada y Visibilidad. El propósito de esta comunicación es presentar algunos resultados geométricos sobre la *deficiencia convexa* de conjuntos compactos en R^n. Esta noción ha sido estudiada para diversos fines, resaltamos un estudio geométrico asociado a la noción de puntos skeletales y skeletons para describir cómo se expande un fuego por una pradera homogénea y seca que tiene una región húmeda en cuya frontera se inicia el fuego. Recientemente se ha caracterizado en términos de la deficiencia convexa, el mirador de un conjunto compacto. Este tipo de resultados es central dentro de la Visibilidad y sugiere estudiar la noción en términos de elementos de dicha teoría. El inicio de este estudio es lo que presentamos aquí.

Algunas definiciones y resultados: Sea $K \subset R^n$ compacto no convexo, la deficiencia convexa de K es $D(K) = convK \setminus K$, K_0 denota una componente conexa de $D(K)$, $lncK$ es el conjunto de puntos de no convexidad local de K

R.1. Si $x \in \ln cK$ entonces $x \in bdD(K)$

R.2. Si $bdK_0 \not\subset bdK$, existe $x_0 \in K_0$ tal que el cono de infinitud de S por x_0 es no trivial (S es la componente conexa de $K^C / S \supset K_0$)

R.3. Si P es el conjunto de puntos extremales de $convK$, $bd(convK) \cap (bdK)^C \cap P = \emptyset$

R.4. Si $bdK_0 \not\subset bdK$, $\exists y,z \in bd(convK)$ / $[y,z] \subset bd(convK)$

R.5. Si K_0 es única, H hiperplano de apoyo de $conv(clK_0)$ por $p \in bd(conv(clK_0)) \cap bdK \cap (bd\ convK)^C$, H^+ semi-espacio cerrado determinado por H / $H^+ \not\supset K_0$ y $p \notin lncK$, la estrella de p en K se describe completamente por $H^+ \cap K$.

Autores: Formica, Alberto; Rodríguez, Mabel
Lugar: U. N. Gral. Sarmiento - Instituto del Desarrollo Humano, Bs. As.

Elementos de iluminación y visibilidad a través de operadores

Esta comunicación se enmarca en el área de Convexidad Generalizada. A partir de la noción de Iluminación que utilizan Boltyanski y Martini para convexos, definimos un "operador de iluminación", que notaremos $\boldsymbol{il_K}$, sobre conjuntos $A \subset K^c$, $(K \subset R^n)$. Con este operador, determinamos condiciones sobre la iluminación de Fr(K), donde K no necesariamente es convexo. Si K es un cuerpo convexo compacto, a partir del operador $\boldsymbol{il_K}$ se obtiene una condición necesaria para la iluminación de K. Se estudia también la relación entre el operador $\boldsymbol{il_K}$ y el operador σ_K definido por Martini y Wenzel, y a partir de este último, se obtiene una caracterización de conjuntos convexos en R^n. Esta comunicación continúa la que en la reunión anual 2004 de la UMA presentaran J. C. Bressan y A. Formica desde el punto de vista axiomático. Algunas definiciones y proposiciones son las siguientes:

D.1. Dado $K \subset R^n$, $\boldsymbol{il_K} : \boldsymbol{P}(E) \to \boldsymbol{P}(\mathrm{cl}(E))$ se define por
$il_K(A) = \{y \in Fr(K) : \exists a \in A, [a,y] \cap K = \emptyset \wedge [a,y> \cap \, \mathrm{int}(K) \neq \emptyset\}$.
En lo que sigue, K es un subconjunto **cerrado** de R^n, $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ y $x \in E = K^c$.

P.1. Si K es compacto entonces se verifica: i) Si $K = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(K))$, $y \in Fr(K)$, y $(x,y) \subset \mathrm{int}\sigma_K(A)$ entonces $y \in il_K(A)$. ii) il_K es monótono

P.2. $il_K(x) \subset il_K(\sigma_K(x))$, y si K convexo entonces $il_K(\sigma_K(x)) \subset il_K(x)$

P.4. K convexo A, B⊂E. Si $\sigma_K(A) \subseteq \sigma_K(B)$ entonces $il_K(A) \subseteq il_K(B)$.

P.5. Si $A \subset R^n$ y K cuerpo convexo compacto tal que $il_K(A) = Fr(K)$ entonces $\mathrm{aff}(A) = R^n$

P.6. Sea $K \subset R^n$ compacto e $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$. Se verifica que K es convexo si y sólo si, para todo $x \in K^c$ se verifica que $\sigma_K(x) \cap \mathrm{conv}(K) \neq \emptyset$.

Autores: Peña, Carlos Barrenechea, Ana
Lugar: UNCPBA-Tandil

Operadores LUC sobre un álgebra de Banach con una densidad hiperbólica

Se considera el álgebra de funciones absolutamente integrables sobre el semieje positivo respecto de una densidad hiperbólica. Esta álgebra reviste interés por dos razones. Por un lado, la versión discreta de la misma produce el marco natural en el que se estudian las representaciones irreducibles del grupo de Lie SU(2) (v. [1]). Por otra parte, se trata de un álgebra de Banach no-abeliana de no-convolución no-unitaria. En principio evaluamos el espacio ideal maximal y la acción explícita de la transformada de Gelfand. Observamos luego que el álgebra en cuestión no satisface la propiedad de Radón-Nikodým. Por ello, cabe la posibilidad de existencia de operadores lineales acotados no representables. Sin embargo, se prueba que la clase de operadores acotados localmente absolutamente continuos lo es, y determinamos los núcleos correspondientes. Este tipo de teoremas de representación son de interés si se trata de determinar teoremas de existencia y de estructura de derivaciones en el álgebra de operadores (cf. [2], [3]).

Referencias

[1] Dieudonné, J.: *Treatise on Analysis.* Volume V, Acad. Press, N. Y., (1977).

[2] A. Barrenechea & C. C. Peña: *On innerness of derivations on S(H).* Lobachevskii J. of Math., Vol. 18, 21-32, (2005).

[3] A. Barrenechea & C. C. Peña: *Some remarks about bounded derivations on the Hilbert algebra of square summable matrices.* Matematicki Vesnik, **57**, No. 4, 78-95, (2005).

Autores: Francisco Martínez Pería y Alejandra Maestripieri
Lugar: UNLP-IAM y UNGS-IAM

Complementos de Schur en Espacios de Krein

Dado un operador (acotado) semidefinido positivo A sobre un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ y un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$, Anderson y Trapp definen el complemento de Schur $A_{/\mathcal{S}}$ como

$$A_{/\mathcal{S}} = \max_{\leq}\{X \in L(\mathcal{H}) : 0 \leq X \leq A,\ R(A) \subseteq \mathcal{S}^{\perp}\},$$

donde $\leq$ representa el orden usual entre operadores autoadjuntos. Por su parte, Pekarev probó que $A_{/\mathcal{S}} = A^{1/2} P_{\mathcal{M}^{\perp}} A^{1/2}$, siendo $P_{\mathcal{M}^{\perp}}$ la proyección ortogonal al subespacio $\mathcal{M}^{\perp} = A^{-1/2}(\mathcal{S}^{\perp})$.

Sea $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ el espacio de Krein cuya métrica indefinida está dada por

$$[\,x, y\,] = \langle\, Jx, y\,\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

con $J = J^* = J^{-1} \in L(\mathcal{H})$ ($L(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores acotados sobre $\mathcal{H}$). Dado $T \in L(\mathcal{H})$ y $\mathcal{W}$ un subespacio de $\mathcal{H}$, notaremos $T^{\#}$ al operador J-adjunto de T y $\mathcal{W}^{[\perp]}$ al complemento J-ortogonal de $\mathcal{W}$.

Todo operador J-autoadjunto $A \in L(\mathcal{H})$ puede factorizarse como $A = DD^{\#}$, siendo $D \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ inyectivo (y $\mathcal{K}$ espacio de Krein). Sin embargo, este tipo de factorización no es única. Es decir, existen operadores J-autoadjuntos que admiten dos o más factorizaciones donde los factores son no isomorfos.

Si $\mathcal{S}$ es un subespacio de Krein de $\mathcal{H}$ y $A = DD^{\#} \in L(\mathcal{H})$ cumple la Propiedad de Factorización Única, definimos el complemento de Schur $A_{/[\mathcal{S}]}$ como

$$A_{/[\mathcal{S}]} = DP_{\mathcal{M}^{[\perp]}//\mathcal{M}}D^{\#},$$

siendo $P_{\mathcal{M}^{[\perp]}//\mathcal{M}}$ la proyección J-ortogonal sobre $\mathcal{M}^{[\perp]} = D^{-1}(\mathcal{S}^{[\perp]})$.

El objetivo de este trabajo es caracterizar a $A_{/[\mathcal{S}]}$ y comparar sus propiedades (especialmente en el caso en que $\mathcal{S}$ es definido) con las del complemento de Schur de un operador semidefinido positivo en un espacio de Hilbert.

Autores: Varela, Alejandro y Andruchow, Esteban
Lugar: Instituto de Ciencias-Univ. Nac. de Gral. Sarmiento

Geodésicas en la esfera de un módulo C^*

Dada una C^*-álgebra unital $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$ un módulo C^* a derecha sobre $\mathcal{A}$, consideramos el problema de encontrar curvas suaves cortas en la esfera $\mathcal{S}_\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{X} : \langle x, x\rangle = 1\}$. Las curvas en $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ se miden considerando la métrica de Finsler que consiste en tomar la norma de $\mathcal{X}$ en cada espacio tangente de $\mathcal{S}_\mathcal{X}$. Hemos solucionado el problema de valores iniciales para el caso en que $\mathcal{A}$ sea un álgebra de von Neumann y $\mathcal{X}$ autodual. En concreto: para cada elemento $x_0 \in \mathcal{S}_\mathcal{X}$ y cualquier vector v tangente en x_0, existe una curva $\gamma(t) = e^{tZ}(x_0)$, $Z \in \mathcal{L}_\mathcal{A}(\mathcal{X})$, $Z^* = -Z$ y $\|Z\| \leq \pi$, tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\dot\gamma(0) = v$, que es minimizante a lo largo de su recorrido para $t \in [0, 1]$. La existencia de tal Z está relacionada con el problema de extensión de operadores autoadjuntos. Tales curvas minimales no necesariamente son únicas. También consideramos el problema de contorno: dado $x_0, x_1 \in \mathcal{S}_\mathcal{X}$, encontrar una curva de longitud mínima que los una. En este caso hemos obtenido varias respuestas parciales. Por ejemplo, si llamamos f_0 a la proyección autoadjunta $I - x_0 \otimes x_0$, y se tiene la hipótesis de que el álgebra $f_0\mathcal{L}_\mathcal{A}(\mathcal{X})f_0$ es finito dimensional, entonces existe una curva γ que une x_0 y x_1, que es minimizante a lo largo de su recorrido.

Autores: Pedro Massey y Mariano Ruiz
Lugar: Universidad Nacional de La Plata

Completaciones a marcos ajustados

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión finita y $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión decreciente de números positivos. Dado un conjunto de vectores $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ en $\mathcal{H}$, encontramos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y una sucesión de Bessel $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$ en $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ es un marco ajustado en $\mathcal{H}$, con $\|g_i\|^2 = a_i$ para $1 \leq i \leq r$ que llamamos una "**a** -completación" de $\mathcal{F}$. Estas condiciones dependen de resultados de [1].

Además, calculamos explícitamente el mínimo $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con esta propiedad. Esto resuelve completamente un problema enunciado en [3]. Por otra parte, usando resultados de [2], mostramos un algoritmo computable que permite hallar una completación (aunque no con el número óptimo de elementos) de $\mathcal{F}$.

Referencias

[1] J. Antezana, P. Massey, M. Ruiz and D. Stojanoff, *The Schur-Horn Theorem for operators and frames with prescribed norms and frame operator*, Illinois Journal of Mathematics, to appear.

[2] I.S. Dhillon, R.W. Heath Jr., M.A. Sustik, J.A. Tropp, *Generalized finite algorithms for constructing Hermitian matrices with prescribed diagonal and spectrum*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2005), 1, 61-71

[3] D. J. Feng, L. Wang and Y. Wang *Generation of finite tight frames by Householder transformations*, Advances in Computational Mathematics, (2006) 24: 297-309.

Autores: Fongi, Guillermina- Maestripieri, Alejandra
Lugar: UBA-IAM

Componentes de operadores autoadjuntos

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $L(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores lineales acotados en $\mathcal{H}$, $L(\mathcal{H})^s$ el subconjunto de operadores autoadjuntos y $GL(\mathcal{H})$ el grupo de operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$. El grupo $GL(\mathcal{H})$ actúa sobre $L(\mathcal{H})^s$ de modo que el conjunto de operadores inversibles autoadjuntos, $GL(\mathcal{H})^s$, es un espacio homogéneo de $GL(\mathcal{H})$. Dado $a \in L(\mathcal{H})^s$, la órbita de a correspondiente a esta acción es el conjunto $\mathcal{O}_a = \{gag^* : g \in GL(\mathcal{H})\}$. Se caracterizó este conjunto en el caso inversible: si $a \in GL(\mathcal{H})^s$ resulta que dado $b \in GL(\mathcal{H})^s$, $b \in \mathcal{O}_a$ si y sólo si su parte unitaria está en la órbita unitaria de u_a, donde u_a la parte unitaria en la descomposición polar de a.
Paralelamente definimos en $L(\mathcal{H})^s$ tres relaciones de equivalencia que extienden una relación que ya ha sido estudiada en el cono de operadores positivos. Resulta que las clases de equivalencia o *componentes* de $a \in L(\mathcal{H})^s$, C_a, C_a^1, C_a^2 de las tres relaciones verifican que $C_a \subseteq C_a^1 \subseteq C_a^2$. Es inmediato ver que si $\mathcal{P}$ es el conjunto de las reflexiones y $u \in \mathcal{P}$ se tiene que $\pi^{-1}(\{u\}) = C_u$, $\mathcal{O}_u = C_u^1$ y $GL(\mathcal{H})^s = C_u^2$ donde $\pi : GL(\mathcal{H})^s \to \mathcal{P}$, $\pi(a) = u_a$. Más generalmente, se probó que si a es un operador autoadjunto de rango cerrado entonces $C_a = \pi^{-1}(\{v_a\})$, C_a^1 es la órbita de $a_{|_{R(a)}}$ dada por la acción del grupo de operadores inversibles del $R(a)$ y $C_a^2 = GL(R(a))^s$, donde v_a es la isometría parcial de la descomposición polar de a.

Autores: Muro, Santiago - Carando, Daniel - Dimant, Verónica
Lugar: UBA - UdeSA

Sucesiones coherentes de ideales de polinomios sobre espacios de Banach

Los ideales de polinomios sobre espacios de Banach más usados se pueden considerar como el análogo n-homogéneo a un ideal de operadores. Este es el caso, entre otros, de los ideales de polinomios nucleares, integrales, múltiple r-sumantes, r-dominados, etc. Sin embargo, la extensión de un ideal de operadores lineales a grados más altos no es siempre obvia. Por ejemplo, existen varias extensiones del ideal de los operadores de absolutamente r-sumantes.

Uno de los objetivos de este trabajo es clarificar la relación entre un ideal $\mathfrak{A}$ de operadores y un ideal de polinomios definido como extensión de $\mathfrak{A}$. Para ello introducimos el concepto de *compatibilidad* entre un ideal de polinomios n-homogéneos y un ideal de operadores. La extensión del ideal de operadores $\mathfrak{A}$ a distintos grados da lugar a una sucesión $\{\mathfrak{A}_k\}_k$, donde cada $\mathfrak{A}_k$ un ideal de polinomios k-homogéneos. Entonces, es interesante estudiar no sólo la compatibilidad de cada ideal de polinomios $\mathfrak{A}_k$ con $\mathfrak{A}$, si no también la relación entre diversos $\mathfrak{A}_k$. Con este fin, definimos el concepto de *coherencia* de una sucesión de ideales de polinomios. Aplicamos estos conceptos a distintos ideales de polinomios conocidos. Mostramos que no todas las extensiones usuales del ideal de operadores absolutamente r-sumantes son compatibles con él. Describimos el mayor y menor ideal de polinomios compatibles con un ideal de operadores dado, lo que nos permite caracterizar la familia de todos los ideales de polinomios compatibles con éste. Por otra parte, mostramos que dado un ideal de polinomios, no puede haber más de un ideal de operadores compatible con él.

Autores: Marta García - Manuel Aguirre
Lugar: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As.

Algunos productos de distribuciones usando las Series de Laurent

Sabemos que en [[1],pag.89] aparece un método para evaluar producto de distribuciones usando la Serie de Laurent.

Usando éste método, en este trabajo se obtiene un desarrollo en Serie de la Delta de Dirac soportada en $(1-x^2)$, y productos del tipo :

1.- $(1 \pm x)^{-k} \delta^{(s)} (1 \pm x)$

2.- $(1-x^2)^{-k}\delta^{(s)}(1-x^2)$

donde $k = 1, 2, ...$ y $s = 1, 2, 3, ...$

References

[1] Aguirre Manuel and Chenkuan Li -" The distributional products by the Laurent Series" to appear in Math Nachr (Germany).

Autores: Federico Martinez; Pedro Catuogno; Sandra Molina
Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata

Expansiones de Laguerre y producto de distribuciones

En [1] ha sido desarrollado un método para multiplicar distribuciones temperadas basado en los teoremas de representación de distribuciones temperadas en series de Hermite. Como continuación de ese trabajo, hemos estudiado un producto de distribuciones temperadas con soporte positivo, considerando las aproximaciones dadas por las expansiones en series de Fourier-Laguerre. Se han estudiado propiedades de dicho producto y calculado algunos ejemplos.

Bibliografía

[1] P.Catuogno, S.Molina y C.Olivera, *On Hermite Representations of Distributions and Products*, (aparecerá en Integral Transform and Special Functions).
[2] A.J.Duran, *Laguerre Expansions of Tempered Distributions and Generalized Functions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 150 (1990), 166-180.
[3] M.Oberguggenberger, *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations.* Pitman Research Notes in Math. Series 259. Ed Longman Science and Technology, 1993.
