

Autores: Arouxét, María Belén; Echebest, Nelida; Pilotta, Elvio
Lugar: UNLP; UNLP; FAMAF

CONVERGENCIA GLOBAL DEL MÉTODO WEDGE USANDO MODELOS CUADRÁTICOS

Este trabajo extiende los resultados de convergencia global del método Wedge de Marazzi y Nocedal [1, 2] cuando se emplea un modelo de interpolación cuadrático. El método Wedge fue diseñado para resolver problemas de funciones suaves, con una cantidad moderada de variables, cuando no se dispone del cálculo de las derivadas. Este genera un modelo que interpola los valores de la función objetivo usando un conjunto de puntos muestrales, y usa regiones de confianza para conseguir la convergencia. El subproblema generado en cada iteración asegura que todos los puntos utilizados satisfacen cierta condición geométrica necesaria y, luego, son adecuados para generar el próximo modelo con iguales características. Los autores citados presentan dos versiones del método, una usando modelos lineales y otra con modelos cuadráticos, mostrando también la convergencia global para el caso del interpolante lineal.

Se presentarán además resultados numéricos del método analizado comparándolo con otros métodos conocidos de esta área temática.

Referencias

- [1] M. Marazzi. Nonlinear optimization with and without derivatives. PhD thesis, 2001.
- [2] M. Marazzi y J. Nocedal. Wedge trust region methods for derivative free optimization, Mathematical programming, Vol. 91 (2): pp 289-305, 2002.

Autores: Hector E. Odstrcil

Lugar: Centro de Investigaciones Básicas y Aplicadas - U. N. de Jujuy -
Facultad de Ingeniería

MODELIZACIÓN DIFERENCIAL

El presente trabajo consiste en el desarrollo de un algoritmo que sea capaz de ajustar, un sistema de ecuaciones en diferenciales de primer orden (lineales o no), a fenómenos que fueron muestreados en forma discreta, y en particular se probó que el método desarrollado de ajuste local para el modelo de Lorenz.

Este es un algoritmo matemático que realiza estimaciones sobre parámetros del sistema de ecuaciones en cada n-upla muestreada, almacenándolos en un conjunto de matrices, de modo que dicho algoritmo escogerá del conjunto la matriz de parámetros óptima para el intervalo donde se analizó el fenómeno, de manera tal que produzcan el mínimo error entre el modelo candidato y los datos experimentales. Con el método combinado aquí presentado se consigue un ajuste muy rápido. De esta forma el modelo candidato podrá describir en forma cualitativa y cuantitativa el comportamiento del fenómeno.

El algoritmo se implementó mediante un programa realizado en MATLAB, que recibe por un lado el sistema de ecuaciones en diferenciales de primer orden, como modelo candidato y la serie experimental del fenómeno.

Estos análisis y desarrollos, están enmarcados dentro de las tareas de un proyecto de investigación acerca de la optimización de algoritmos de cálculo numérico, formado por un grupo interdisciplinario, perteneciente al Centro de Investigaciones Básicas y Aplicadas dependiente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy.

Autores: N. Echebest, M. T. Guardarucci, H. Scolnik
Lugar: Depto. de Matematica. Facultad de Ciencias Exactas. UNLP.

EXTENSIÓN DEL ESQUEMA DE PROYECCIONES OBLICUAS INCOMPLETAS AL CASO DE PROBLEMAS CON RANGO DEFICIENTE

El objetivo de este trabajo es extender la aplicabilidad de los esquemas algorítmicos introducidos por los autores en previas publicaciones [1] a la resolución de sistemas lineales inconsistentes con rango deficiente. Estos algoritmos emplean proyecciones incompletas sobre el conjunto solución del sistema aumentado $Ax-r=b$, y un esquema alternante de proyecciones que converge a una solución de cuadrados mínimos del problema. Con ese propósito se usan proyecciones oblicuas aproximadas, y en particular se introducen proyecciones oblicuas variables provenientes de la penalización del problema. Estas se definen por medio de matrices que penalizan la norma de los residuos, muy fuertemente en las primeras iteraciones y decreciendo su influencia a lo largo del procedimiento iterativo, con el objetivo de lograr convergencia más rápida. Las propiedades teóricas de los nuevos algoritmos se analizan y se presentan experiencias numéricas comparando su eficiencia con varios métodos de proyecciones muy conocidos y utilizados en la resolución de problemas de reconstrucción de imagen.

[1] *Incomplete Oblique Projections for Solving Large Inconsistent Linear Systems*, H. Scolnik, N. Echebest, M.T. Guardarucci, M. C. Vacchino, (to appear in Mathematical Programming B) (2005).

Autores: Pedro Morin, Kunibert G. Siebert, Andreas Veese
Lugar: IMAL-UNL (Santa Fe), Augsburg (Alemania), Milán (Italia)

UN RESULTADO DE CONVERGENCIA BÁSICO PARA ELEMENTOS FINITOS ADAPTIVOS

Los métodos de elementos finitos se utilizan con éxito para calcular soluciones numéricas de ecuaciones en derivadas parciales. Son, hoy en día, herramientas estándar en ciencia e ingeniería. Sólo los métodos adaptivos permiten la simulación de problemas multi-escala, especialmente en tres dimensiones. Una iteración típica adaptiva es un ciclo de la forma

Resolver $\longrightarrow$ Estimar $\longrightarrow$ Marcar $\longrightarrow$ Refinar.

El análisis de los métodos adaptivos debe proveer, en primer lugar, cotas calculables del error para el paso *Estimar*, que se denominan *estimadores del error a posteriori*. En segundo lugar, se debe estudiar si tal iteración realmente conduce a una mejora en la solución, es decir, debe demostrarse que la sucesión de soluciones discretas converge a la solución exacta.

Hasta el momento, los resultados de convergencia para métodos de elementos finitos adaptivos en dimensiones 2 y 3 se basan en procedimientos especiales de marcado y reglas de refinamiento específicas, que no son las más utilizadas en aplicaciones prácticas.

En esta charla mostraremos que *todos* los algoritmos adaptivos utilizados en la práctica convergen para una gran clase de problemas lineales, sin necesidad de ingredientes especiales.

ESTIMADORES A POSTERIORI DEL ERROR PARA UN PROBLEMA PARABÓLICO CON COEFICIENTES DISCONTINUOS.

En este trabajo consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

en el cual $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio Lipschitz, poligonal, acotado y particionado en subdominios Lipschitz poligonales abiertos; $(0, T)$ es un intervalo de tiempo dado y el coeficiente $k(x)$ una función positiva y constante sobre cada subdominio; f y u^0 son funciones conocidas.

En este problema, el parámetro $k(x)$ puede tener saltos de varios órdenes de magnitud, que ocasionan una pérdida de regularidad en la solución y crea dificultades para resolver numéricamente la ecuación.

Aproximamos la solución del problema (1) usando una discretización por Elementos Finitos en el espacio y Diferencias Finitas en el tiempo. Para realizar más eficientemente los cálculos, y dada la falta de regularidad de la solución, usamos adaptatividad para lo cual se necesitan estimadores a posteriori del error robustos.

En este trabajo proponemos estimadores a posteriori para los errores de discretización espacial y temporal que resultan en una cota superior global del error, independiente del tamaño de la malla, paso de tiempo o parámetros del problema, que sólo depende del ángulo mínimo de la triangulación.

Finalizamos presentando experimentos numéricos que muestran la eficiencia de los cálculos adaptativos.

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL MULTIVARIADA EN NODOS IMPLÍCITOS

Se estudia el problema de interpolación polinomial multivariada cuando el conjunto de nodos es una $\mathbb{Q}$ -variedad algebraica afín 0-dimensional V de $\mathbb{C}^n$, que se supone dada en forma implícita por polinomios $F_1, \dots, F_n$ en $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$. A partir de estos polinomios se construye un subespacio $\prod_V$ de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ en donde la interpolación de polinomios arbitrarios de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ es posible y única, con la propiedad que los grados de los polinomios en $\prod_V$ están acotados por $n(d-1)$, siendo d una cota para los grados de los polinomios $F_1, \dots, F_n$. La demostración de la existencia de un tal subespacio $\prod_V$ se basa en una fórmula de interpolación hallada por L.Kronecker, en el concepto de resolución geométrica de la variedad V , y en la propiedades de la traza del anillo de coordenadas de la variedad V . Se considera finalmente una versión algorítmica de este problema. Se prueba de hecho la existencia de un algoritmo que recibe como entrada un programa que evalúa los polinomios $F_1, \dots, F_n$ y F y que devuelve como salida los siguientes ítems

- un programa que evalúa una sucesión de polinomios que forman una base de un subespacio de interpolantes $\prod_V$ como arriba.
- las coordenadas en la base del ítem anterior del polinomio en $\prod_V$ que interpola al polinomio de entrada F .

Si la talla del programa de entrada es a lo sumo L y la cardinalidad de V es δ , entonces el algoritmo se ejecuta con $\mathcal{O}(L\delta^2)$ operaciones aritméticas en $\mathbb{Q}$.

OPTIMIZACIÓN SOBRE FUNCIONES CONVEXAS

Muchos problemas de interés tanto teórico como práctico involucran encontrar el óptimo sobre una familia de funciones convexas. Por ejemplo, encontrar la proyección de una función en $H^k(\Omega)$ sobre las convexas de ese espacio, o en economía, encontrar

$$\max_{u \in \mathcal{D}} \int_Q (\nabla u(x) \cdot x - u(x) - c |\nabla u|^2) f(x) dx, \quad (1)$$

donde $Q = [0, 1]^d$, c es una constante no negativa, f es una función no negativa, y $\mathcal{D}$ son las funciones convexas sobre Q que satisfacen restricciones adicionales sobre el gradiente.

En el caso continuo y suponiendo suavidad, las restricciones de convexidad pueden darse pidiendo que el Hessiano sea semi-definido positivo, pero al hacer aproximaciones discretas surgen dos problemas: las soluciones pueden no ser suaves (como es el caso en (1) si $c = 0$), y las funciones con Hessiano discreto semi-definido positivo pueden no ser convexas en el sentido discreto.

Es así que algunos autores han trabajado con descripciones no locales que hacen que la cantidad de restricciones crezca en dos dimensiones como $N^{1.8}$ siendo N el número de nodos de la malla, y siendo muy difícil de generalizar a más dimensiones.

En este trabajo proponemos una aproximación en diferencias finitas usando un Hessiano discreto apropiado, que nos permite demostrar convergencia bajo condiciones generales, aún cuando la solución continua no sea suave, trabajando en cualquier dimensión, con $O(N)$ restricciones.

Usando códigos de programación Semi Definida Positiva (SDP), mostramos ejemplos concretos de aproximaciones a algunos de los problemas mencionados.
