Análisis Real y Armónico

Autores: Serrano Eduardo
Lugar: ECyT - UNSAM

Acerca de la estimación numérica de la regularidad puntual de funciones mediante wavelets

Las propiedades de una función en un punto x_0 de su dominio puede expresarse en término de la pertenencia a ciertas clases funcionales cuya definición depende de uno o más parámetros numéricos, comunmente denominados *exponentes de regularidad* o *de oscilación*. El exponente puntual de Holder es el ejemplo más conocido. Los *espacios 2-microlocales* asociados a dos exponentes, pueden considerarse como una extension y refinamiento de los espacios Holderianos.

La pertenencia de una función a tales clases puede caracterizarse por medio de la Transformada Wavelet, continua o discreta, bajo hipótesis bastante amplias sobre la wavelet madre.

En general, estos métodos de análisis se basan en el comportamiento de la trasformada cuando la escala tiende hacia las altas frecuencias mientras que, localmente, se concentra entorno de x_0. Consecuentemente, se plantea la cuestión de la estimación numérica en al caso de que la función esté dada por su muestreo o se exprese por una secuencia de datos experimentales.

El empleo de wavelets para estas estimaciones requiere de la apropiada selección de la wavelet, de la transformada y de la técnica adecuada para el problema planteado. La eficiencia del método dependerá de la capacidad de lograr, a partir de finitos datos, la extrapolación de la transformada hacia las altas frecuencias y la consecuente interpolación entorno del punto x_0.

En esta presentación se discuten algunos aspectos de esta cuestión, principalmente en el caso de la estimación del exponente Holder puntual y al par de exponentes microlocales.

Autores: Nicolás, Francisco
Lugar: FCE-UNLP

Una estimación para el potencial de capa doble

Se presentará una estimación en norma supremo para el potencial de capa doble asociado al Laplaciano en función de la geometría del dominio. El potencial de capa doble de una función f definida en el borde de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se define como

$$u(X) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{(X-Q)\cdot N_Q}{|X-Q|^n} f(Q) d\sigma(Q), \quad X \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \tag{1}$$

donde N_Q denota el vector normal interior a $\partial\Omega$ en Q y ω_n es el área de la superficie de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Se demostrará que $|u(X)| \leq c(X) \| f \|_{\mathbf{L}^\infty(\partial\Omega)}$, donde

$$\begin{aligned} c(X) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S_n} \mathcal{H}^0(\partial\Omega \cap \mathcal{P}_X^{-1}\{\nu\}) d\mathcal{H}^{n-1}(\nu) \\ &\leq t(X) := \sup_{\nu \in S_n} \mathcal{H}^0(\partial\Omega \cap \mathcal{P}_X^{-1}\{\nu\}), \end{aligned} \tag{2}$$

$\mathcal{P}_X(Y) = \frac{Y-X}{|Y-X|}$, y $\mathcal{H}^k$ es la medida de Hausdorff k-dimensional.

La función $c(X)$ en general no es acotada en Ω. Sí lo es en dominios cuasi convexos (esto es, $t(\Omega) := \| t \|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} < \infty$), en cuyo caso se prueba de manera directa que $\| u \|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq C \| f \|_{\mathbf{L}^\infty(\partial\Omega)}$.

$c(X)$ no es otra cosa que $\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} |\frac{(X-Q)\cdot N_Q}{|X-Q|^n}| d\sigma(Q)$, sin embargo la expresión (2) tiene dos potenciales ventajas: 1- Permite apreciar la relación que existe entre la forma del dominio Ω y el comportamiento del potencial; 2- Hay una notable similitud con las fórmulas de área y co-área que podría explotarse.

Autores: Toschi Marisa, Sanmartino Maria Marcela
Lugar: Universidad Nac. de La Plata

Estimaciones a Priori con Pesos

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ con borde $\partial\Omega \in C^2$ y sea u solución del problema de Dirichlet en Ω

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\Omega, w)$, w un peso tal que $w \in A_2$.
Entonces

$$\|D_{x_i x_j} u\|_{L^2(\Omega,w)} \leq C \, \|f\|_{L^2(\Omega,w)}$$

Para probar estas estimaciones hemos utilizado la teoría general de integrales singulares y probado acotaciones para las derivadas de la función de Green en dominios apropiados.

Referencias:

[1] G. Fabes, Comunicación Personal (1990).

[2] S. J. Gardiner and A. Gustafsson, “Smooth Potentials With Prescribed Boundary Behaviour”. Mathematics, (2000).

[3] M.Grüter and K-O Widman, “The Green Function for Uniformly Elliptic Equations”. Manuscripta Math 37 (1982), 303-342.

[4] A. Dall` Acqua and G. Sweers, “Estimates for Green Function and Poisson kernels of higher order Dirichlet boundary value problem”. J. Differential Equation 205 (2004), 466-487.

[5] K-O Widman, “Inequalities for the Green Function and Boundary Continuity of the Gradient of Solutions of Elliptic Differential Equations”. Math. Scand. 21 (1967), 17-37.

Autores: José Luis Romero
Lugar: Facultad de Cs. Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

---

Perturbación de conjuntos de muestreo en espacios de tipo spline irregulares

El problema del muestreo es el de reconstruir una señal continua a partir de sus muestras en ciertos instantes de tiempo. Dada una familia de funciones, un conjunto de muestreo es un conjunto de puntos tal que la norma de las funciones de la familia es equivalente a la norma de sus muestras. El caso clásico, ampliamente estudiado, es el de las funciones de *banda limitada*, es decir, las funciones cuya transformada de Fourier está soportada en cierto intervalo.

Modernamente, se estudia el mismo problema en espacios de funciones más generales llamados de tipo spline. Los resultados de existencia del caso de banda limitada descansan en la analiticidad de las funciones y no se pueden trasladar directamente a escenarios más generales. Con todo, para configuraciones regulares de puntos (reticulados) se tienen algunos resultados de existencia.

En este trabajo exploramos la posibilidad de obtener resultados de muestreo irregular perturbando configuraciones regulares de puntos. Probamos que todo conjunto de muestreo en un espacio de tipo spline puede ser ligeramente perturbado sin perder sus propiedades y estimamos en ciertos casos cuánto es posible perturbarlos. Además probamos un resultado de interés teórico sobre la existencia de configuraciones óptimas.

Autores: Rela, Ezequiel
Lugar: Facultad de Cs. Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

---

Conjuntos de Furstenburg y una variante del problema de Kakeya en dimensión 2

Un conjunto de Kakeya o Besicovitch es un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que para cada $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ existe un segmento unitario I_e en dirección e contenido en E. La conjetura "H" de Kakeya dice que los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ tienen dimensión de Hausdorff ($\dim_H$) igual a n. Esta conjetura es cierta en dimensión 2 pero está abierta en dimensiones superiores. Un problema de similar aspecto en $\mathbb{R}^2$ es el de los conjuntos de Furstenburg(α): Dado un parámetro $\alpha \in (0,1]$ decimos que un conjunto compacto E de $\mathbb{R}^2$ es de Furstenburg(α) si para cada dirección $e \in \mathbb{S}^1$ existe una recta R_e tal que $\dim_H(R_e \cap E) \geq \alpha$. En este trabajo exponemos una prueba de la conjetura "H" de Kakeya en $\mathbb{R}^2$ que se basa en la acotación fuerte de tipo $(2,2)$ conocida para el operador maximal de Kakeya $K_\delta : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ definido por

$$K_\delta(f)(e) = f^*_\delta(e) = \sup_{a\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f|\, dx$$

donde $T_e^\delta(a)$ denota al tubo de longitud unitaria, sección de radio δ y eje principal en la dirección e centrado en el punto a. Adaptamos luego la prueba para demostrar el siguiente resultado conocido para los conjuntos de Furstenburg(α): Si $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ entonces $\dim_H(E) \geq 2\alpha$. Obtenemos como corolario inmediato usando el caso $\alpha = 1$ una versión más fuerte de la conjetura "H" de Kakeya en $\mathbb{R}^2$: Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que para cada dirección posible contiene un subconjunto de dimensión 1 de una recta en dicha dirección debe tener necesariamente dimensión de Hausdorff 2.

Autores: Ferreyra, E. - Urciuolo, M.
Lugar: FaMAF - Ciem, UNC -Conicet

Restricción de la transformada de Fourier a algunas hipersuperficies de R^3

Para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y $a, b \geq 2$, sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = |x_1|^a + |x_2|^b .$$

Sea B la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$ y sea $\Sigma = \{(x, \varphi(x)) : x \in B\}$ con la medida de Lebesgue inducida.

Consideramos el operdor de restricción, a la superficie Σ, de la transformada de Fourier. Estudiamos el conjunto tipo

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [0,1] \times [0,1] : \exists c > 0 \text{ con } \left\| \widehat{f} \right\|_{L^q(\Sigma)} \leq c \left\| f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},\ \forall f \in S\left(\mathbb{R}^3\right) \right\}.$$

Obtenemos condiciones necesarias para que un par $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ pertenezca a E. También probamos que si $\frac{3}{4} < \frac{1}{p} \leq 1$ y $\frac{1}{q} > \frac{ab+a+b}{a+b} \frac{1}{p'}$ entonces $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E$. Más aún, si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{3}$, este resultado es "sharp" salvo por algunos puntos borde de E.

Autores: Ferrari Freire, Cecilia (1-2) - Bernardis, Ana Lucía (1) - Macías, Roberto (1-3)
Lugar: (1) IMAL(Conicet) - (2) UNCo - (3) FIQ(UNL)

Desigualdades con pesos para un operador maximal de Césaro

En [BM1] se estudia el operador maximal de Cesàro unidimensional

$$M_\alpha f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} |f(y)| \left(1 - \frac{|x-y|}{R}\right)^\alpha dy,$$

con $-1 < \alpha \leq 0$, en el contexto de los espacios L^p con pesos y en [BM2] se estudia una extensión del operador M_α a dimensiones mayores. En este trabajo se presenta una versión n dimensional del operador M_α diferente de la estudiada en [BM2] y que está relacionada con una forma diferente de entender la convergencia Cesàro múltiple. El operador maximal considerado es el siguiente:

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup \frac{1}{|\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{R}} |f(y)| \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{|x_i - y_i|}{R_i}\right)^{\alpha_i} dy,$$

con $-1 < \alpha_i \leq 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$ y donde el supremo se toma sobre todos los rectángulos n dimensionales $\mathcal{R} = [x_1 - R_1, x_1 + R_1] \times \cdots \times [x_n - R_n, x_n + R_n]$ tales que $1/2 \leq R_i/R_j \leq 2$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$. Los resultados obtenidos son caracterizaciones de los pesos w para los cuales el operador $\mathcal{M}_\alpha$ satisface desigualdades de tipo fuerte y de tipo débil con respesto a ese peso w.

Referencias

[BM1] Bernardis, A. y Martín-Reyes, F., Weighted inequalities for a maximal function in the real line. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 131 (2001), No 2, 267-277.
[BM2] Bernardis, A. y Martín-Reyes, F., The Cesàro maximal operator in dimension greater than one. J. Math. Anal. Appl., 288 (2003), 69-77.

Autores: A. Kanashiro, G. Pradolini, O. Salinas
Lugar: Santa Fe

Acotación de operadores maximales generalizados en espacios de Orlicz

Sea $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función convexa, no decreciente, tal que $\eta(0) = 0$ y $\eta(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, que satisface una condición Δ_2 y con derivada $\eta'(t) \approx \eta(t)/t$. Con esta función consideramos el operador

$$M_\eta f(x) = \sup_{B: x \in B} \|f\|_{\eta,B}$$

donde $\|f\|_{\eta,B} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B|}\int_B \eta\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)dy \leq 1\right\}$ y el supremo se toma sobre todas las bolas B de R^n que contienen a x. Con respecto a este operador probamos que son equivalentes las siguientes condiciones:

i) $\int_0^{2t} \eta'\left(\frac{t}{s}\right)\frac{a(s)}{s} ds \leq Cb(Ct)$, para todo $t > 0$.

ii) $\int_{R^n} \Phi(M_\eta f(x))dx \leq C\int_{R^n} \Psi(|f(x)|)dx$

iii) $\|M_\eta f\|_\Phi \leq C\|f\|_\Psi$

donde $\Phi(t) = \int_0^t a(s)ds$ y $\Psi(t) = \int_0^t b(s)ds$.

Se analizan, además, extensiones a espacios de tipo homogéneo.

Autores: Ricardo Testoni y Carlos Segovia
Lugar: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires e Instituto Argentino de Matemáticas, Concejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

---

Un teorema de multiplicadores para espacios de Hardy con pesos laterales

Sea $m(\xi)$ una función acotada definida en $\mathbb{R}-\{0\}$ y T el operador multiplicador asociado a $m(\xi)$ definido a través de la trasformada de Fourier por

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\,\widehat{f}(\xi)$$

para $f \in L^2$. Sea K, $\widehat{K} = m$ entonces $Tf = K * f$. Si $m(\xi)$ es el límite de una función acotada y analítica en el semiplano superior entonces K está soportado en $(-\infty, 0)$.

En este trabajo estudiamos condiciones sobre $m(\xi)$ que impliquen que T sea un operador acotado en el espacio de Hardy lateral $H_+^p(\omega)$ donde $0 < p < \infty$ y ω es un peso en la clase A_s^+, $s \geq 1$.

Más precisamente si para $\ell \geq 0$ suficientemente grande y algún $1 \leq q \leq 2$, $m(\xi)$ satisface

$$\left(\int_{R/2 \leq |\xi| \leq R} |D^\alpha m(\xi)|^q \, d\xi \right)^{1/q} \leq c R^{1/q-\alpha},$$

para todo $R > 0$, y todo α, $0 \leq \alpha \leq \ell$ y, en caso de ser ℓ no entero,

$$\left(\int_{R/2 \leq |\xi| \leq R} \left| D^{[\ell]} m(\xi) - D^{[\ell]} m(\xi - z) \right|^q d\xi \right)^{1/q} \leq c \left(\frac{|z|}{R} \right)^{\ell - [\ell]} R^{1/q-\ell},$$

con $|z| < \frac{R}{2}$, para todo $R > 0$, entonces T es un operador acotado en $H_+^p(\omega)$.

Autores: P. Rocha - T. Godoy
Lugar: Córdoba

Una estimación para la transformada de Fourier de algunas medidas singulares

Consideramos para una clase de funciones $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ que satisfacen una condición de homogeneidad no isotrópica $\varphi(t^{\alpha_1}x_1, t^{\alpha_2}x_2) = t^m \varphi(x_1, x_2)$, la transformada de Fourier $\widehat{\mu}$ de la medida de Borel sobre $\mathbb{R}^4$ definida por $\mu(E) = \int_Q \chi_E(x, \varphi(x))\,dx$ donde $Q = [-1,1] \times [-1,1]$. Damos bajo algumas hipótesis adicionales sobre φ, una estimación para $\widehat{\mu}$ y de este hecho obtenemos un teorema de restricción para la transformada de Fourier usual en el gráfico de $\varphi_{|Q}$. Obtenemos también propiedades L^p mejoradas para el operador de convolución $T_\mu f = \mu * f$.

Autores: Crescimbeni, R. ; de la Torre, A. y Torrea J.L.
Lugar: Universidad N. del Comahue, Universidad de Málaga, Universidad Autónoma de Madrid

---

Acotación con dos pesos de operadores laterales

Se plantea resolver el siguiente problema, presentado por Muckenhoupt, en el contexto de operadores laterales: Dado un operador sublineal T encontrar condiciones sobre la función positiva v tal que asegure la existencia de una función u de modo que

$$(\int |Tf(x)|^q u(x)\ dx)^{\frac{1}{q}} \leq C(\int |f(x)|^p v(x)\ dx)^{\frac{1}{p}}$$

Son conocidos los resultados en este sentido, debido a Andersen y Sawyer [1], para la maximal de Hardy Littlewood lateral y la maximal fraccionaria lateral como así también para la integral fraccionaria lateral. Estudiamos el problema para estos operadores utilizando el método de J. L. Rubio de Francia basado en la relación entre las desigualdades vectoriales y las desigualdades con pesos. Asimismo obtuvimos condiciones suficientes de acotación para la integral singular lateral y para los operadores $S_r f(x) = (\sum_{-\infty}^{\infty} |A_n f(x) - A_{n-1} f(x)|^r)^{\frac{1}{r}}$ y $Tf(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \nu_k (D_k f(x) - D_{k-1} f(x))$ donde $A_n f(x) = \frac{1}{2^n}\int_x^{x+2^n} f(y)dy$, $D_k f(x) = \frac{1}{\epsilon_k}\int_x^{x+\epsilon_k} f(y)dy$, ϵ_k una sucesión lacunary y ν_k una sucesión acotada.
Es conocido que estos últimos operadores son operadores integrales singulares (ver [2] y [3]), pero se obtienen condiciones suficientes intermedias entre las que surgen de la acotación de la maximal lateral y de la integral singular lateral.
Se analizaron también las singularidades de los operadores $S_r f$ y Tf para f acotadas.

Referencias:
[1] Andersen, K y Sawyer E.: Weighted norm inequalities for the Rieman-Liouville and Weyl fractional integral operators.Trans. AMS 308 (1988).
[2] A. de la Torre y J.L.Torrea: One sided discrete square function. Studia Math. 156(3) 2003.
[3] Bernadis, Lorente, Martín-Reyes, Martinez, de la Torre, Torrea: Differential transform in weighted spaces. Preprint

---

Autores: Anibal Chicco Ruiz, Eleonor Harboure
Lugar: Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, Universidad Nacional del Litoral

---

Desigualdades con pesos para el semigrupo del Calor asociado a funciones de Laguerre

Consideramos el semigrupo del calor asociado a tres tipos de funciones de Laguerre en $(0,\infty)$ con medida $d\mu$, siendo $d\mu(x) = dx$ en dos casos y $d\mu(x) = x^\alpha dx$, para $\alpha > -1$, en el restante. A partir de su forma integral, obtenemos acotaciones del núcleo muy precisas que nos permiten deducir condiciones suficientes sobre pesos ω para obtener tipo fuerte (p,p) y tipo débil $(1,1)$ en el espacio $((0,\infty), \omega(x)d\mu(x))$ para el operador maximal asociado. Previamente, habíamos obtenido condiciones para pesos potencia, resultando éstas necesarias y suficientes. Un resultado similar con pesos generales fue obtenido por Nowak considerando pesos A_p, pero esta clase no dependía del parámetro α como era esperado.

Autores: Hugo Aimar
Lugar: Santa Fe

Regularización de Bases de Haar

Como una aplicación del Lema de Cotlar se da una nueva demostración de que las regularizadas por convolución de bases de Haar producen bases de Riesz. La técnica puede extenderse a contextos geométricos generales.

Autores: Ivana Gómez, Hugo Aimar, Bibiana Iaffei
Lugar: IMAL (CONICET); FIQ-FHUC (UNL)

Una fórmula del valor medio y regularidad de tipo Besov para ecuaciones parabólicas

Usando los resultados de [3] (ver también [1], pág. 52), se prueba una fórmula de valor medio para soluciones u de la ecuación del calor del tipo

$$u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} K(x-y, t-s) u(y,s)\, dyds$$

donde el núcleo $K(\xi,\tau) = (|\xi|/\tau)^2 \eta(\rho(\xi,\tau))$ y η puede elegirse de modo que: $\eta \geq 0$, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{sop} \eta \subseteq [\varepsilon, 1]$ para algún $\varepsilon > 0$, y donde $\rho(\xi,\tau) = (4\pi\tau)^{1/2} e^{|\xi|^2/4\tau}$. La misma se utiliza para adaptar la técnica de [2] para obtener estimaciones en normas de Lebesgue hasta la frontera de dominios cilíndricos del gradiente de u en términos de ciertas normas de tipo Besov parabólico.

Referencias

[1] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR 1625845 (99e:35001)

[2] David Jerison and Carlos E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **130** (1995), no. 1, 161–219. MR 96b:35042

[3] N. A. Watson, *A theory of subtemperatures in several variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **26** (1973), 385–417. MR 0315289 (47 #3838)

Autores: Marilina Carena, Hugo Aimar, Bibiana Iaffei
Lugar: IMAL (CONICET); FIQ-FHUC (UNL)

Completitud de la propiedad de duplicación en la métrica de Hausdorff-Kantorovich

Sea (X, ρ) un espacio métrico compacto. Sea $\mathcal{K}$ el conjunto formado por todos los subconjuntos compactos no vacíos de X equipado con la distancia de Hausdorff d_H. Sobre el conjunto $\mathcal{M}(X)$ de todas las medidas de Borel regulares sobre (X, ρ) definimos $d_K(\mu, \nu) = \sup\left\{\left|\int_X f\, d\mu - \int_X f\, d\nu\right| : f \in \mathrm{Lip}_1\right\}$. La d_K-convergencia es equivalente a la convergencia débil $*$ al mismo límite. Estudiaremos ciertos subconjuntos del espacio $\mathscr{X} = \mathcal{K} \times \mathcal{M}$. Dados dos elementos (Y_i, μ_i) de $\mathscr{X}$, $i = 1, 2$, definiendo la distancia $\delta\left((Y_1, \mu_1), (Y_2, \mu_2)\right) = d_H(Y_1, Y_2) + d_K(\mu_1, \mu_2)$, se tiene que $(\mathscr{X}, \delta)$ es un espacio métrico completo. Sean $\mathcal{E}$ el conjunto de todos $(Y, \mu) \in \mathscr{X}$ tal que $\mathrm{sop}(\mu) \subseteq Y$, y sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los (Y, μ) en $\mathcal{E}$ tales que $\mu(Y) = 1$. Probamos que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{P}$ son subespacios métricos completos de $(\mathscr{X}, \delta)$. Introducimos la propiedad de duplicación de una medida de varias formas. En lo que sigue $A \geq 1$, $\alpha > 1$ y $(Y, \mu) \in \mathcal{P}$ están dados. Decimos que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_A^\alpha$ si $0 < \mu(B(y, \alpha r)) \leq A\mu(B(y, r))$ para todo $y \in Y$ y $r > 0$. Diremos que $(Y, \mu) \in \mathcal{S}_\varphi\mathcal{D}_A^\alpha$ si para todo $y \in Y$ y $r > 0$ tenemos que $0 < \int \varphi_{y,\alpha r}(x)\, d\mu(x) \leq A \int \varphi_{y,r}(x)\, d\mu(x)$, donde $\varphi_{y,s}(z) = \varphi\left(\frac{\rho(y,z)}{s}\right)$ para $s > 0$, y φ es una función continua fija no negativa definida sobre $\mathbb{R}_0^+$ con soporte compacto y tal que $\varphi(0) > 0$. El par $(Y, \mu) \in \mathcal{BD}_A^\alpha$ si $0 < \mu(B(y, \alpha r)) \leq A\mu(B(y, r + \epsilon))$ para todo $y \in Y$, $r > 0$ $\epsilon > 0$. Finalmente $(Y, \mu) \in \mathcal{ND}_A^\alpha$ si para todo $y_1, y_2 \in Y$ y $r > 0$ con $\rho(y_1, y_2) < \alpha r$, vale que $0 < \mu(B(y_1, r)) \leq A\mu(B(y_2, r + \epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$. El principal resultado que nos permite construir espacios de tipo homogéneo como límite de iteraciones, es el siguiente:

Teorema. *Los espacios $\mathcal{S}_\varphi\mathcal{D}_A^\alpha$, $\mathcal{BD}_A^\alpha$, y $\mathcal{ND}_A^\alpha$ son cerrados en $(\mathscr{X}, \delta)$, y en consecuencia toda contracción sobre ellos tiene un único punto fijo.*

Autores: María Laura Santori- Raquel Crescimbeni- Mariela Martinez- Hugo Aimar(1)
Lugar: Universidad Nacional del Comahue- (1) Universidad Nacional del Litoral

---

Espacios Lipschitz con métrica no isotrópica

Es conocido que los espacios Lipschitz pueden ser vistos como casos particulares de espacios de Besov, más concretamente una función pertenece al espacio Λ_α, con $0 < \alpha < 1$ si y sólo si $\sup|\varphi_t * f(x)| \leq C\, t^\alpha$, para φ función suave que permita utilizar la fórmula de reproducción de Calderón, y en donde las dilataciones φ_t son las usuales. Investigamos sobre la posibilidad de caracterizar los espacios Lipschitz asociados a una métrica no isotrópica de la misma manera, utilizandos dilataciones no isotrópicas y haciendo uso de una fórmula de Calderón en este contexto. Asimismo estudiamos la posibilidad de caracterizar el espacio Lipschitz uno no isotrópico por medio de diferencias segundas.

Referencia:

-Hernández, E.- Weiss, G., *A First Course on Wavelets*, CRC Press, New York, (1996).
-Stein E.: *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, (1970).

Autores: Bruno Bongioanni, Eleonor Harboure y Oscar Salinas
Lugar: IMAL-UNL Santa Fe

Potencias negativas del operador de Schrödinger en espacios BMO modificados

Consideremos el operador de Schrödinger $H = -\Delta + V(x)$, donde el potencial $V \geq 0$ satisface una desigualdad de Hölder al revés.

Si $\alpha > 0$ y f suficientemente buena definimos el operador $\mathcal{I}_\alpha f(x) = H^{-\alpha/2} f(x) = \int_0^\infty e^{-tL} f(x)\, t^{\alpha/2-1}\, dt$, donde e^{-tH}, para $t > 0$, es el semigrupo del calor asociado a H.

Motivados por los trabajos de [1] y [2], si $\beta \geq 0$ y w es un peso en $\mathbb{R}^d$, definimos el espacio $BMO_H^\beta(w)$, como el conjunto de las funciones localmente integrables f que satisfacen que para toda bola $B = B(x,R)$, se tiene $\displaystyle\int_B |f - f_B| \leq C_1\, w(B)\, |B|^{\beta/d}$, y $\displaystyle\int_B |f| \leq C_2\, w(B)\, |B|^{\beta/d}$, si $R \geq \rho(x)$, donde $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B |f|$, $\rho(x) = \sup\left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-1}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}$ y C_1 y C_2 son constantes independientes de f.

Obtenemos que si $0 < \alpha < d$ y exigimos a w ciertas propiedades, el operador $\mathcal{I}_\alpha$ resulta acotado de $L^{p,\infty}(w)$ en $BMO_H^{\alpha-d/p}(w)$ para $\frac{d}{\alpha} \leq p < \frac{d}{(\alpha-\delta)^+}$, donde δ depende del potencial V.

Referencias

[1] J. Dziubanski, G. Garrigós, T. Martínez, J. Torrea, and J. Zienkiewicz. BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. *Math. Z.*, 249(2):329–356, 2004.

[2] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Relations between weighted Orlicz and BMO_ϕ spaces through fractional integrals. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 40(1):53–69, 1999.

Autores: María Luisa Gordillo y Carlos Cabrelli
Lugar: Univ. Nacional de San Juan y Univ. de Buenos Aires

Análisis de Multirresolución Irregulares

La idea central en el concepto de análisis de multirresolución es la de obtener aproximaciones sucesivas de un objeto en diferentes escalas. Esto es particularmente relevante en procesamiento de imagenes y otras aplicaciones. Los subespacios involucrados son invariantes por traslaciones en un reticulado, que se va refinando con las diferentes escalas.

En muchas situaciones sin embargo, es mas realista, considerar grillas irregulares, que se van refinando de una manera arbitraria. Con este objetivo, se introduce el concepto de Análisis de Multirresolución Irregular (AMRI) en donde el subespacio inicial no es invariante por traslaciones enteras, pero esta generado por una cantidad finita de funciones y sus traslaciones en una grilla irregular fija.

Estos espacios han sido considerados en la literatura bajo el nombre de Espacios de Tipo Spline, aunque no asociados a subespacios de multirresolución. En este trabajo preliminar se prueba la existencia de AMRIs para una clase muy numerosa de grillas y generadores. Se observa además que estos AMRIs estan asociados a wavelets con traslaciones y dilataciones irregulares consideradas recientemente en varios trabajos en el área.

Autores: Alfredo L. González, Pedro J. Catuogno y Sebastián E. Ferrando
Lugar: Universidad Nacional de Mar del plata

Expansiones en martingalas adaptadas, via un algoritmo codicioso

Se describe una construcción algorítmica de un sistema ortonormal, tipo Haar, óptimo, adaptado a una variable aleatoria de cuadrado integrable, en un espacio de probabilidad filtrado. Las expansiones en estos sistemas son martingalas, y la filtración asociada es generada por la v. a. de entrada, siendo ésta una propiedad crucial para su aplicación en finanzas.

El referido algoritmo está basado en el *principio de la bañera*, [Lieb and Loss, *Analysis*, AMS 1997], produciendo una selección de átomos, pertenecientes a una sucesión creciente de particiones, sobre los cuales está soportado el referido sistema. La expansión de la v. a. converge a ella.

Autores: Bruno Mesz, Eduardo Serrano
Lugar: UNSAM

Procesamiento de señales musicales mediante paquetes de onditas

En esta presentación proponemos una primera familia de funciones, del tipo *paquetes de onditas*, adaptada al procesamiento de señales musicales. Las mismas se generan por la modulación, el cambio de escala y las traslaciones de una *función de onda esferoidal achatada* (prolate spheroidal wave function). Se pretende detectar la actividad de cada nota mediante convoluciones de estas funciones con la señal musical. Por otra parte,se prueba que la familia constituye un marco de un apropiado espacio de Paley-Wiener. En la aplicación numérica se emplean algoritmos eficientes para el cálculo de las funciones básicas. En los experimentos realizados con música monofónica,la aplicación permite una clara identificación de las notas presentes.Para la aplicación a música polifónica,parece promisorio el empleo de átomos armónicos formados agrupando funciones básicas centradas en los mltiplos de una frecuencia dada. Otra posibilidad es explotar la relacin de doble escala que verifican las funciones básicas para operar con un esquema de multirresolución,donde los niveles de alta precisión temporal permiten localizar los ataques y los de alta resolución frecuencial las alturas. Para subsanar el hecho de que las funciones base no son absolutamente integrables se propone un esquema anlogo empleando funciones splines de soporte compacto.

Autores: Manuel Aguirre
Lugar: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As.

Una nueva expresión para el producto de convolución de las derivadas de orden k de la delta de Dirac soportada en $|x|^2 - m^2$

La distribución $\delta^{(k)}(\mid x \mid^2 - m^2)$ es definida ([1]), página 341) de la siguiente forma:

$$\delta^{(k)}(\mid x \mid^2 - m^2) = (-1)^k \lim_{\alpha \to -k} \frac{(m^2 - \mid x \mid^2)_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{1}$$

Usando la fórmulas

$$\{\delta^{(k)}(\mid x \mid^2 - m^2)\} = \frac{(-1)^k}{\pi^{-\frac{n}{2}}} \sum_{l \geq \frac{n}{2}-k-1} \{ \frac{(m^2)^l \triangle^{l-\frac{n}{2}+k+1}\delta}{4^{l-\frac{n}{2}+k+1}(l-\frac{n}{2}+k+1)!} \} \tag{2}$$

for n even if $k < \frac{n}{2}$

$$\{\delta^{(k)}(\mid x \mid^2 - m^2)\} = \frac{(-1)^k}{\pi^{-\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{l \geq 0} \{ \frac{(m^2)^l \triangle^{l-\frac{n}{2}+k+1}\delta}{4^{l-\frac{n}{2}+k+1} l!(l+k+1-\frac{n}{2})!} \} \tag{3}$$

for n even if $k \geq \frac{n}{2}$

Las cuales aparecen en([1]), en este trabajo se obtiene la siguiente fórmula

$$\delta^{(k)}(\mid x \mid^2 - m^2) = \sum_{l \geq o} \frac{(-m^2)^l}{l!} \delta^{(k+l)}(\mid x \mid^2) \tag{4}$$

la cual permite darle un sentido la producto de convolución

$$\delta^{(k)}(\mid x \mid^2 - m^2) * \delta^{(t)}(\mid x \mid^2 - m^2).$$

Referencias

[1] Aguirre T. Manuel., Distributional convolution product between the k-th derivative of Dirac's delta in $\mid x \mid^2 - m^2$, Integral Transforms and Special Functions, 2000, vol. 10, No. 1, pp. 71-80

[2] Erdelchi A.,Higher Trascendental Functions,Vol.I and II,McGraw-Hill,New York,1953.