ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DINÁMICOS

Autores: Leandro Del Pezzo, Julian Fernandez Bonder, Julio Rossi
Lugar: UBA- Buenos Aires

UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION PARA EL PRIMER AUTOVALOR DE STEKLOV DE UN PROBLEMA NO LINEAL

En este trabajo estudiamos el primer autovalor de Steklow, λ , del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u + \alpha\phi|u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda|u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio (abierto, conexo y acotado con borde suave). Realizamos un análisis de la dependencia del primer autovalor con respecto a la función de peso ϕ y con respecto al parámetro α . Probamos que si fijamos α existe una función de peso ϕ_α que minimiza λ en el conjunto de todas las funciones medibles uniformemente acotadas y con integral fija.

Además, estudiamos el límite de $\{\phi_\alpha\}$ cuando el parámetro α tiende a infinito y encontramos que el límite es el primer autovalor de Steklov en el dominio con un agujero donde la autofunción se anula. Este límite nos da una relación entre nuestro problema y el estudiado por Fernández Bonder-Rossi-Wolanski (ver Behavior of the best Sobolev trace constant and extremals in domains with holes. To appear in Bull. Sci. Math.)

Autores: Déboli, Alberto ; Amster, Pablo
Lugar: Departamento de Matemática ; FCEyN - Universidad de Buenos Aires

UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO A UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

H.B. Thompson [T] ha demostrado la existencia de al menos una solución del siguiente problema, que modeliza la electro difusión de dos iones con igual valencia que se desplazan a través de una membrana:

$$\begin{cases} y'' = y\left\{\lambda - \frac{y(0)^2 - y^2}{2} + \left[l\lambda + \frac{y(0)^2 - y(1)^2}{2}\right]x\right\} - \left[l\lambda + \frac{y(0)^2 - y(1)^2}{2}\right]D \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

donde $x \in (0, 1)$, y $\lambda, l > 0$, y D son parámetros físicos. Dicha existencia es demostrada bajo el supuesto de que

$$\lambda \geq 2l\left(1 - \frac{1}{(1+l)^2}\right)D^2$$

En este trabajo demostramos la existencia de una solución del problema análogo correspondiente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, con condición de frontera de tipo Neumann, bajo determinadas condiciones:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'' = \frac{1}{2}\mathbf{Y}^3 + \mathbf{A}(t, \mathbf{Y}(0), \mathbf{Y}(1))\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t, \mathbf{Y}(0), \mathbf{Y}(1)) \\ \mathbf{Y}'(0) = \mathbf{Y}'(1) = 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

donde $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^t$, $t \in (0, 1)$, $\mathbf{Y}^3 := (y_1^3, \dots, y_n^3)^t$ y $\mathbf{A} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas. La demostración se realiza utilizando un resultado de teoría de grado.

Referencia:

[T] Thompson H.B: *Existence for Two-Point Boundary Value Problems in Two Ion Electrodiffusion*, JMAA 184, 1 (1994) 82-94.

**UNA APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL ANTIMÁXIMO A UN PROBLEMA PERIÓDICO
DE CUARTO ORDEN**

Estudiamos la existencia de soluciones para un problema no lineal de cuarto orden:

$$u^{(4)} + g(t, u, u'') = 0 \quad (1)$$

bajo condiciones de contorno periódicas:

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(T) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Demostremos un principio del antimáximo asociado uniforme, y desarrollemos un método de sub y super soluciones para (1-2) suponiendo que el problema admite una sub-solución α y una super solución β , que satisfacen alguna de las siguientes condiciones (del tipo de “orden invertido”):

1. $\alpha'' + k\alpha \geq \beta'' + k\beta$ para algún k tal que $0 < k < \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$.
2. $\alpha'' - k\alpha \leq \beta'' - k\beta$ para algún k tal que $0 < k < \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$.
3. $\alpha'' + k\alpha \leq \beta'' + k\beta$ para algún k tal que $0 < k < \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$.

Además, utilizando el método de quasilinealización, construimos mediante un esquema recursivo, una sucesión que converge cuadráticamente a la solución.

El método de quasilinealización fue desarrollado por Bellman y Kalaba [2], y generalizado por Lakshmikantham [4, 5]. Fue aplicado con éxito a diferentes problemas no lineales que admiten una sub-solución α y una super-solución β ordenadas ($\alpha \leq \beta$). En un trabajo reciente [3], fue generalizado al caso de orden invertido ($\beta \leq \alpha$), para un problema de segundo orden.

Referencias

- [1] P. Amster, P. De Nápoli; *An application of the antimaximum principle for a fourth order periodic problem*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. No. 3 (2006), pag. 1–12.
 - [2] R. Bellman, R. Kalaba; *Quasilinearisation and Nonlinear Boundary Value Problems*, American Elsevier, New York, 1965.
 - [3] R. Khan, *Existence and approximation of solutions of second order nonlinear Neumann problems*, Electronic Journal of Differential Equations Vol. 2005(2005), No. 03, 1–10.
 - [4] V. Lakshmikantham, *An extension of the method of quasilinearization*, J. Optim. Theory Appl., 82(1994) 315-321.
 - [5] V. Lakshmikantham, *Further improvement of generalized quasilinearization*, Nonlinear Analysis, 27(1996) 315-321.
-

ESTABILIDAD RESPECTO A DOS MEDIDAS

En el estudio de sistemas dinámicos no lineales, uno de los problemas clásicos es el estudio de la estabilidad, que podría presentarse como el estudio de cómo influyen las pequeñas perturbaciones del estado inicial en la evolución del sistema.

Además de las definiciones de estabilidad de puntos de equilibrio dadas a Lyapunov, varias otras formas de estabilidad han sido estudiadas en las últimas décadas, como por ejemplo estabilidad de ciclos límites, estabilidad con respecto a una parte de las variables, atractividad de conjuntos invariantes, etc.

También se han extendido los resultados conocidos a otras clases de sistemas tales como los diferenciales algebraicos, discretos, sistemas dinámicos abstractos en espacios métricos, etc.

Una definición de estabilidad que generaliza varias de las definiciones previas (y que puede extenderse fácilmente a otras clases de sistemas dinámicos) es la estabilidad respecto a dos medidas[1], en donde se definen dos funciones continuas no negativas del espacio de fase, una para medir la perturbación en el estado inicial y otra para medir la perturbación del estado final del sistema.

Aquí mostramos dos conjuntos de condiciones distintos bajo los cuales la atractividad uniforme implica la estabilidad del sistema (por atractividad uniforme nos referimos a que la perturbación tienda uniformemente a cero). También presentamos dos contraejemplos: en uno se muestra que la atractividad no uniforme no garantiza estabilidad; y en el otro se muestra que los resultados presentados no pueden mejorarse, en el sentido que las hipótesis no pueden relajarse de modo tal que sigan siendo válidos esos resultados.

Referencias

- [1] Vorotnikov V. I., Partial Stability and Control: The State-of-the-art and Development Prospects, Automation and Remote Control, Vol. 66, No. 4, 2005, pp.511-561
-

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN UNA ECUACIÓN SEMILINEAL PARABÓLICA

En esta comunicación estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo del problema semilineal parabólico

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Es un hecho conocido que para $1 < p \leq 1 + 2/N$ la solución $u(t)$ no negativa verifica que $\|u(t)\|_\infty$ tiende a $+\infty$ en tiempo finito. Además, si $p > 1 + 2/N$ y suponiendo que cierta norma de u_0 es pequeña, el problema anterior admite solución global en tiempo. En este estudio haremos uso del método de la Entropía para obtener la tasa de decaimiento de dicha solución global. Este método ha sido aplicado exitosamente al comportamiento asintótico de soluciones globales de otras EDP, como por ejemplo en ecuaciones de tipo Fokker-Planck (Carrillo, Toscani, Jungel, Arnold, Markowich y Unterreiter).

Autores: C. Ruscitti, O. Barraza

Lugar: UNLP

Nota: Comunicación enviada para la Reunión 2005, no expuesta en dicha ocasión

ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PARA LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES EN CIERTOS ESPACIOS DE BANACH

En este trabajo se estudia la estabilidad de las soluciones globales de la ecuación de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$, suponiendo que las condiciones iniciales pertenecen a ciertos espacios de Banach. Se establecen condiciones suficientes bajo las cuales dichas soluciones resultan "exponencialmente" estables, suponiendo la existencia de soluciones fuertes de la ecuación. Además, se muestran las estimaciones que cumplen las soluciones perturbadas.

Palabras claves: soluciones fuertes, soluciones mild, perturbación y estabilidad de soluciones.

Autores: Claudia M. Gariboldi - Domingo A. Tarzia

Lugar: Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto. Río Cuarto. Argentina. - Depto. Matemática-CONICET, FCE, Univ. Austral. Rosario. Argentina.

RESULTADOS DE CONVERGENCIA DE UNA FAMILIA DE CONTROLES OPTIMOS FRONTERA EN PROBLEMAS ELÍPTICOS MIXTOS

Se considera un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$, cuya frontera regular consiste de la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 . Se formulan dos problemas elípticos mixtos (P) y (P_α) ($\alpha > 0$) con la misma ecuación de Poisson en Ω , con una condición de temperatura sobre Γ_1 para (P) y una condición convectiva (con α coeficiente de transferencia del calor) sobre Γ_1 para (P_α) . Se formulan los problemas de control frontera:

$$\text{hallar } q_{op} \in L^2(\Omega) \text{ tal que } J(q_{op}) = \underset{q \in U_{ad}}{\text{Min}} J(q) \quad (1)$$

$$\text{hallar } q_{op,\alpha} \in L^2(\Omega) \text{ tal que } J_\alpha(q_{op,\alpha}) = \underset{q \in U_{ad}}{\text{Min}} J_\alpha(q) \quad (2)$$

donde U_{ad} es un conjunto cerrado, convexo y no vacío de $L^2(\Gamma_2)$.

Se prueba que el funcional J es coercivo y G-diferenciable sobre $L^2(\Gamma_2)$ y de la condición de optimalidad se deducen las condiciones de complementariedad en términos del estado adjunto del sistema (P) . Se prueba existencia y unicidad del control frontera óptimo en (1) y se dan algunas propiedades del funcional J . Similares resultados se prueban para J_α , para cada $\alpha > 0$ fijo. Finalmente se prueba que el estado del sistema $u_{q_{op,\alpha}}$ y el estado adjunto del sistema $p_{q_{op,\alpha}}$ del problema (2) son fuertemente convergentes en $H^1(\Omega)$ al correspondiente $u_{q_{op}}$ y $p_{q_{op}}$ del problema (1) respectivamente, además el control óptimo $q_{op,\alpha}$ del problema (2) es fuertemente convergente en $L^2(\Gamma_2)$ al control óptimo q_{op} del problema (1).

Autores: Santillan Marcus, Eduardo A.; Natale, María Fernanda; Tarzia, Domingo A.

Lugar: Universidad Austral, Rosario

DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES TÉRMICOS DESCONOCIDOS DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO POROSO A TRAVÉS DE UN PROCESO DE DESUBLIMACIÓN CON ACOPLAMIENTO DE TEMPERATURA Y HUMEDAD

Se considera un modelo de flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante el congelamiento, con una sobre-condición de temperatura en el borde fijo para la determinación simultánea de coeficientes desconocidos del material semi-infinito $k_1, k_2, c_1, c_2, a_m, \sigma, \rho, r$:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{k_1}{\rho c_1} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; \quad 0 < x < s(t); t > 0$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{k_2}{\rho c_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}; \quad x > s(t); t > 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad x > s(t); t > 0$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}; \quad T_2(x, 0) = T_2(+\infty, t) = t_0; \quad u(x, 0) = u(+\infty, t) = u_0;$$

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = t_v;$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = u(s(t), t) \rho r \frac{ds}{dt}(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t), t) + \delta \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = 0; \quad T_1(0, t) = t_s;$$

$$s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$$

Se hallan condiciones para la existencia de una solución, y las fórmulas correspondientes para los coeficientes a determinar.

BIBLIOGRAFÍA:

[Lu] A. V. Luikov, Int.J.Heat Mass Transfer 18 (1975) 1-14

[Mi] M. D. Mikhailov, Int.J.Heat Mass Transfer 19, (1976) 651-655

[SaTa] E. Santillan Marcus – D. A. Tarzia, Int.J.Eng.Sci. 38 (2000) 1651-1665

[Ta] D. Tarzia, Quarterly Appl.Math. 39 (1981), 491-497

Autores: Domingo A. Tarzia - M; Boukrouche

Lugar: Univ. Austral - CONICET (Rosario, Argentina) - Univ. Saint Etienne (Saint-Etienne, Francia)

COMBINACIONES CONVEXAS DE SOLUCIONES DE INECUACIONES VARIACIONALES ELIPTICAS

Sean V un espacio de Hilbert, V' su dual topológico, K un conjunto convexo, cerrado y no vacío de V , $g \in V'$ y $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica, continua y coerciva. Se considera la siguiente inecuación variacional elíptica:

$$(IVE) \quad u \in K : a(u; v - u) \geq \langle g; v - u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Para cada $g_i \in V'$ con $i = 1, 2$ se considera $u_i = u_{g_i} \in K$ la única solución de la (IVE) para el dato g_i ($i = 1, 2$). Se establece la condición necesaria y suficiente para que la combinación convexa $t u_1 + (1 - t) u_2$ con $t \in [0; 1]$ sea la única solución de la (IVE) para el dato $t g_1 + (1 - t) g_2$ de manera que se tenga la siguiente igualdad:

$$u_{t g_1 + (1-t) g_2} = t u_{g_1} + (1 - t) u_{g_2}, \quad \forall t \in [0; 1].$$

Autores: Griselda R. Itovich, Jorge L. Moiola y Hernán Cendra
Lugar: Dpto. de Matemática, FaEA, Universidad Nacional del Comahue,
Dpto. de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional
del Sur (UNS) y Dpto. de Matemática, UNS

BIFURCACIÓN DE SOLUCIONES CUASIPERIÓDICAS CERCANA A LA SINGULARIDAD DE HOPF DOBLE NO RESONANTE

Se efectúa el análisis dinámico en el entorno de la singularidad de Hopf doble no resonante (HD), que puede caracterizarse por medio de dos parámetros independientes. A través de la teoría de formas normales, el problema se reduce al estudio de un sistema diferencial planar. Entre sus puntos de equilibrio, existen órbitas y soluciones cuasiperiódicas (o toros 2D). Éstas últimas también pueden bifurcarse y originan soluciones que involucran tres modos oscilatorios o toros 3D. Éste es el llamado caso *complejo* de HD (Kuznetsov, 1998).

A través de la metodología en el dominio frecuencia (Moiola and Chen, 1996) y la teoría de Floquet se construyeron las ramas de bifurcaciones Neimark-Sacker que nacen en la singularidad HD y dan lugar a la aparición de soluciones cuasiperiódicas. Para determinar la curva de inicio de soluciones cuasiperiódicas 3D, empleando formas normales se estableció la ecuación de su tangente que pasa por HD. Estos resultados permitieron hallar zonas del plano de parámetros, muy estrechas, donde aparecen los toros 3D y efectuar simulaciones con el programa LOCBIF (Khibnik *et al.*, 1993) que lo corroboran.

Referencias:

- Khibnik, A. I., Kuznetsov, Y. A., Levitin, V. V. and Nikolaev, E. V. [1993] Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODE's and iterated maps, *Physica D*, vol. **62**, pp. 360-371.
- Kuznetsov, Y. A. [1998] *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematics Science **112**. Springer-Verlag, New York.
- Moiola, J. L. and Chen, G. [1996] *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*. World Scientific, Singapore.
-