Teoría de Aproximación

Autores: Levis F. E., Cuenya H. H.
Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto

Una Propiedad de la Medida Planar de la Lemniscata

Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de números complejos y $\mu(A)$ la medida planar del conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ y $c > 0$, consideramos la lemniscata $E(\alpha, c)$, de focos $\alpha_j, 1 \leq j \leq n$, y radio c, es decir, el conjunto $\left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{j=1}^{n} |z - \alpha_j| \leq c \right\}$.

En este trabajo establecemos la siguiente conjetura.

Conjetura *Sea $n \in \mathbb{N}$. Existe una constante $\mathcal{K} > 0$ tal que para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{C}^n$ y para todo radio c, existe un círculo $B = B(\alpha, c)$ contenido en $E(\alpha, c)$ satisfaciendo $\mu(E(\alpha, c)) \leq \mathcal{K}\mu(B(\alpha, c))$.*

Nosotros probamos esta conjetura para el caso de a lo sumo tres focos. Además si $a > 0$, mostramos la existencia de una constante $\mathcal{K} := \mathcal{K}(a) > 0$ verificando la conjetura para todo radio c y para todo $\alpha \in \mathcal{M}_a$, donde

$$\mathcal{M}_a := \left\{ \alpha \in \mathbb{C}^n : \min_{\alpha_j \neq \alpha_i} |\alpha_j - \alpha_i| \geq a \max_{j,i} |\alpha_j - \alpha_i| \right\}.$$

Aquí nosotros convenimos que $\min_{\alpha_j \neq \alpha_i} |\alpha_j - \alpha_i| = 0$ si α es un multi-índice con todas las coordenadas iguales.

Cabe destacar que la validez de la conjetura tiene implicancias en desigualdades polinomiales en espacios L^p, $0 < p \leq \infty$, y permite obtener resultados de mejor aproximación local multipuntual en el dominio complejo, para k-uplas balanceadas.

Autores: F. Mazzone y E. Schwindt
Lugar: Río Cuarto

Una fórmula minimax para mejores aproximantes naturales

Es conocida la no unicidad del mejor aproximante por funciones monótonas en la métrica uniforme. Como fuera hecho por Landers y Rogge para mejores aproximantes en la norma L^1; R. Darst y S. Sahab demostraron que el límite de mejores aproximantes por funciones no decrecientes en la norma L^p a una función continua f tiende, cuando $p \to \infty$, a un mejor aproximante de f en la métrica uniforme. Es usual llamar a este mejor aproximante, el *mejor aproximante natural* de f. En este trabajo encontramos una fórmula explícita, del tipo minimax para el mejor aproximante natural. Además damos una demostración más breve de los resultados de Darst y Sahab y establecemos algunas propiedades de los mejores aproximantes naturales.

Autores: M.Lorenzo, H.Cuenya y C.Rodríguez
Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto

Aproximación cuasi racional en varios puntos.

Sean V y W dos subespacios de dimensión finita de $C^{k+1}(\Omega)$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Consideramos W_0 el subespacio definido por $\{w \in W : w(0) = 0\}$ y W_1 el espacio afín $\{w \in W : w(0) = 1\}$. Dada $f \in C^{k+1}(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, decimos que $(v_\epsilon, w_\epsilon) \in V \times W_1$ es un ϵ - mejor par aproximante de f con respecto a la seminorma $\| \, . \, \|_\epsilon$ si:

$$\|(fw_\epsilon - v_\epsilon)^\epsilon\|_\epsilon = \min_{(v,w)\in V\times W_1} \|(fw - v)^\epsilon\|_\epsilon.$$

Introducimos en este trabajo las propiedades de diferenciabilidad directa e inversa para una familia de seminormas $\| \, . \, \|_\epsilon$. Asumiendo que las seminormas satisfacen estas propiedades, que el subespacio $fW_0 - V$ es unívocamente interpolante en cero de orden k y que además $fW_0 \bigcap V = \{0\}$, probamos que $v_\epsilon \to v \in V$ y $w_\epsilon \to w \in W_1$, para $\epsilon \to 0$, donde v y w son las únicas funciones que verifican: $D^\alpha(fw - v)(0) = 0$, $|\alpha| \leq k$. También damos una familia de ejemplos de seminormas que tienen las propiedades de diferenciabilidad directa e inversa: por un lado las seminormas consideradas en [2] y por otro lado cierto tipo de normas pesadas. Para un caso particular de estas últimas, obtenemos un resultado de mejor aproximación local cuasi racional para un punto en $\mathbb{R}^n$, probado en [1]. Nuestro trabajo abarca el caso de aproximación cuasi racional multi puntual.

[1] Chui C. K., Diamond H. and Raphael L.A. Best Local Approximation in Several Variables. Journal of Approximation Theory, 40, (1984), 343-350.

[2] Zó, F. and Cuenya H.H. Best approximations on small regions. A general approach.(2006). Por aparecer.

Autores: Gaspoz, Fernando
Lugar: IMAL - FIQ (UNL)

Interpolación y Espacios de Aproximación

En los procesos de aproximación no-lineal medimos la velocidad de decrecimiento del error en términos del número de parámetros en el aproximante. Estos procesos de aproximación pueden definirse como la aproximación de una función $f \in \mathbb{X}$ a través de una sucesión de variedades no-lineales $\mathbb{X}_n \subset \mathbb{X}$. Definimos entonces el espacio de funciones aproximables a velocidad α, $\mathbb{A}^\alpha = \{f \in \mathbb{X} : ||f||_\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \inf_{g\in\mathbb{X}_n} ||f - g||_{\mathbb{X}} < \infty\}$. Tratamos la caracterización de estos espacios para el método de elementos finitos adaptativo utilizando teoría de interpolación.

Autores: Felipe Zó y Fernando Mazzone
Lugar: IMASL-UNSL y UNRío Cuarto

Algunas desigualdades débiles y fuertes para operadores de mejor aproximación

Dada una sucesión no decreciente de σ-retículos $\mathcal{L}_n$ de un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y dada $f \in L_p(\Omega)$, D. Landers y L. Rogge estudiaron estimaciones de la función maximal asociada a $\mathcal{L}_n$, a saber:

$$f^*(x) = \sup |g_n|,$$

donde g_n es un mejor aproximante a f por funciones $\mathcal{L}_n$-medibles en $L_p(\Omega)$. En especial ellos demostraron que la función maximal satisface cierta desigualdad $(p-1, p-1)$ débil y desigualdades (q, q) fuertes cuando $q > p-1$. Posteriormente S. Favier y F. Zó extendieron estos resultados, a espacios de Orlicz. Ellos demostraron que el operador maximal en $L_\Phi(\Omega)$ es de tipo débil (Φ', Φ') y de tipo (Ψ, Ψ) fuerte para ciertas funciones Ψ, en especial $\Psi' = [\Phi']^p$, $1 \leq p$ y $\Psi = [\Phi]^p$ para $p \geq p_0$ y p_0 es un número menor a 1. En este trabajo mejoramos los resultados anteriores, en particular transformamos la desigualdad débil en otro tipo de desigualdad débil, con esta nueva desigualdad nos es relativamente sencillo determinar una clase general de funciones Ψ para las cuales vale la desigualdad fuerte. Los resultados obtenidos implican los de S. Favier y F. Zó y se mejora uno de ellos, en el sentido que nos es posible derivarlo con menos hipótesis.

Autores: Norma Yanzón, Nicolás Cortés, Felipe Zó
Lugar: IMASL-UNSL

La función error para dilataciones no homogéneas

Sean seminormas monótonas de funciones $\|F\|_\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, actuando sobre funciones medibles Lebesgue $F : B \subset^n \longrightarrow^k$, donde $B = \{x \in : |x| \leq 1\}$. Suponemos que son finitas sobre las funciones constantes y que para cada $F \in C_k(B)$, se verifica $\|F\|_\varepsilon \to \|F\|_0$, cuando $\varepsilon \to 0$. Además $\|F\|_0$ es una norma sobre $C_k(B)$. Denotamos por π^m al conjunto de todos los polinomios algebraicos en n-variables de grado a lo más $m, M = (m_1, ..., m_k)$ y Π_k^M al conjunto $\{P = (p_1, ..., p_k) : p_i \in \pi^{m_i}\}$.
Sea $\mathcal{A}$ un subespacio de polinomios $\Pi_k^M \subseteq \mathcal{A} \subseteq \Pi_k^{\overline{M}}$, y $P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ una mejor aproximación de la función F con la seminorma $\|F\|_\varepsilon{}^* = \|F^\varepsilon\|_\varepsilon$, con $F^\varepsilon(x) = F(\varepsilon^{\alpha_1} x_1, ..., \varepsilon^{\alpha_k} x_k)$ y donde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ Sea $E_\varepsilon(F)$ la función error cuya i-ésima componente es $\varepsilon^{-\alpha_i(m_i+1)} [F^\varepsilon - P_\varepsilon^\varepsilon]_i$ .Se demuestra que el error es $[E_\varepsilon(F)]_i = \sum\limits_{|\beta|=m_i+1} a_{\beta,i}\, \mathbf{x}^\beta - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha_i(m_i+1)}} \left[P^\varepsilon_{A^\varepsilon,\alpha}(G)\right]_i + o(1)$con $\alpha_i m_i = m, \alpha_i \overline{m_i} = \overline{m}$ para todo i, donde los coeficientes $a_{\beta,i}$vienen dados por el polinomio de Taylor generalizado de grado $\overline{m}$ $\left[T_{\overline{M}}(\mathbf{x})\right]_i = \sum\limits_{|\beta| \leq \overline{m_i}} a_{\beta,i} \mathbf{x}^\beta$.
