Topología y Matemática Discreta

Autores: Juan Carlos Bressan
Lugar: Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires

Una topología compatible con una geometría lineal densa y extensible

Sea (X, ***S***) una geometría lineal densa y extensible (*unending*), donde X es un conjunto y ***S*** una función *segmento* en X, ***S***$(a,b) = [a,b] \subseteq$ X, que cumple los axiomas dados en Coppel [1]. Se demuestra que (X, ***S***) es un espacio de **JD**-convexidad T_1 con la propiedad de Pasch, con lo cual se puede desarrollar una teoría de los conjuntos convexos y de los estrellados que no requiera una topología.

En esta comunicación se induce una topología sobre X a partir de la estructura de (X, ***S***). Se define el conjunto de puntos internales de A (*inter* A) por analogía con el caso vectorial, un entorno convexo de x es un convexo U, tal que $x \in$ U = *inter* U; con lo cual si $y \in$ U, U es entorno convexo de y. Así se obtiene una topología sobre X. Denotaremos con "*int*" el interior y con "*cl*" la dausura en dicha topología. Si C es convexo, entonces *inter* C = *int* C. El espacio vectorial real n-dimensional es un geometría lineal densa y extensible, tal que la topología así inducida es igual a la topología de sus normas.

Para obtener ciertas propiedades topológicas de los convexos y estrellados análogas a las que se demuestran en espacios vectoriales topológicos se dan algunos axiomas relativos a los entornos que permiten suplir la ausencia de una estructura vectorial. Denotaremos con "*conv*" la cápsula convexa, "*cconv*" la cápsula convexa cerrada, *mir* S = $\{x \in S : \forall y \in S, [x,y] \subseteq S\}$, si $p \neq z$, $(p,z) = [p,z] \setminus \{p,z\}$. Algunos de los resultados que se obtienen con estos axiomas adicionales son:

1) Si S $\subseteq$ X, entonces *mir* S $\subseteq$ *mir*(*cl* S), (*mir* S) $\cap$ (*int* S) $\subseteq$ *mir* (*int* S) y *cconv* S = *cl*(*conv* S).
2) Si C es convexo, entonces *int* C y *cl* C son convexos.
3) Si S $\subseteq$ X es abierto, entonces *conv* S es abierto.
4) Si C es convexo con *int* C $\neq \varnothing$, entonces *inter* C = *int* C = *int* (*cl* C).
5) Si $p \in$ *int*(*mir* S) y $z \in$ *cl* S, entonces $(p,z) \subseteq$ *int* S.

[1] W. Coppel: *Foundations of Convex Geometry*, Cambridge, 1998.

Autores: Marina Fragalá, Gabriel Minian
Lugar: UNGS y Universidad de Buenos Aires

Sd-homotopía para espacios parcialmente ordenados

Los poespacios y la homotopía dirigida comenzaron a ser estudiados por varios topólogos algebraicos en los últimos años, con el objetivo de modelar y resolver problemas de ejecución simultánea provenientes de la computación científica. Un poespacio es un espacio topológico junto con un orden parcial y una homotopía dirigida o di-homotopía es una homotopía que tiene en cuenta también el orden parcial de los espacios involucrados.

La noción de sd-homotopía está muy relacionada con la de di-homotopía, aunque su formulación es más geométrica y, por lo tanto, más manejable.

En esta charla introduciremos los conceptos básicos de la sd-homotopía y mostraremos varios ejemplos y aplicaciones de esta teoría. Entre otras cosas, veremos su relación con la homotopía clásica y con la di-homotopía, definiremos el grupo fundamental de sd-homotopía y analizaremos la información geométrica que se puede extraer de él.

Autores: Gabriel Minian
Lugar: Universidad de Buenos Aires

La topología de un conjunto con relaciones

Una relación de equivalencia en un conjunto X induce una estructura de grupoide y, vía la realización geométrica, una topología en X. Si, en lugar de una sola relación , se tienen varias relaciones de equivalencias definidas en X (que interactúan entre sí), entonces X admite una estructura de *atlas de grupoides*. Esta noción fue introducida recientemente por A. Bak, R. Brown, G. Minian y T. Porter para estudiar algunos objetos matemáticos relacionados con la topología algebraica y la K-teoría.

En esta charla contaré como se pueden estudiar distintas relaciones (no necesariamente de equivalencia) definidas en un conjunto dado utilizando herramientas y métodos relativamente básicos de la topología algebraica.

Autores: Gatica, M. Andrea; Rey, Andrea A.; Suárez-Alvarez, Mariano
Lugar: UNS-UBA

Equivalencia homotópica entre coronas débiles y coronas

En esta comunicación se definirá el concepto de corona débil, introducido por Assem - Platzeck - Redondo - Trepode, y se probará la existencia de una equivalencia homotópica débil entre una corona débil y una corona, a partir de una topología dada para posets. De esta forma quedarán determinados los grupos de homotopía, homología y cohomología de la realización geométrica del complejo simplicial asociado a las coronas débiles via la realización geométrica del complejo simplicial asociado a las coronas.

Autores: Jonathan Barmak, Gabriel Minian
Lugar: Universidad de Buenos Aires

La 2-dimensión de un poset desde el punto de vista topológico

Todo conjunto ordenado finito es un suborden de 2^n para algún n. La 2-dimensión de un poset finito P es el mínimo n tal que P es suborden de 2^n. Este invariante comenzó a estudiarse a partir de la década del 70 y en la actualidad sigue siendo estudiado por matemáticos y computadores científicos.
Si bien se han encontrado algunas cotas y varias fórmulas para la 2-dimensión de un poset de n puntos, el cálculo preciso de este invariante no resulta sencillo.
Usando una identificación entre los posets finitos y los espacios topológicos finitos T_0, definiremos y estudiaremos el concepto de la 2-dimensión desde el punto de vista topológico.
Mostraremos primero cómo se pueden obtener las cotas clásicas utilizando argumentos topológicos y luego probaremos cómo se pueden refinar esas cotas utilizando argumentos sencillos de teoría de homotopía para espacios finitos.

Referencias
1. J.A. Barmak, E.G. Minian. *Minimal finite models.* Preprint (2006).
2. B. Dushnik, E. Miller. *Partially ordered sets.* Am. J. Math. 63 (1941), 600-610.
3. M. Habib, L. Nourine, O. Raynaud, E. Thierry. *Computational aspects of the 2-dimension of partially ordered sets.* Theoretical Computer Science 312 (2004), 401-431.
4. W.T. Trotter. *Embedding finite posets in cubes.* Discrete Math. 12(1975), 165-172.
5. W.T. Trotter. *Combinatorics and partially ordered sets: Dimension theory.* John Hopkins University Press, Baltimore (1991).
6. W.T. Trotter. *Graphs and partially ordered sets: Recent results and new directions.* Technical report, Arizona State University (1995).

Autores: M. P. Dobson, M. Gutierrez, J. L. Szwarcfiter
Lugar: U.N.R - U.N.L.P - U.F.R.J

Sobre grafos cubridores con restricciones

Un grafo de comparabilidad es aquel que admite una orientación transitiva en sus aristas. Dada una tal orientación, si consideramos sólo las aristas dirigidas no implícitas por transitividad, obtenemos el diagrama de dicha orientación. Su grafo cubridor es el grafo subyacente en el correspondiente diagrama.

En este trabajo se considera el problema de hallar una orientación transitiva para un grafo de comparabilidad con la condición de que su grafo cubridor contenga un conjunto dado de aristas. Basándose en la descomposición modular de un grafo, condiciones necesarias y suficientes son presentadas para cada tipo de vértice del árbol descomposición modular.

Finalmente, un algoritmo del orden n^2 , con n el número de vértices del grafo, determina si tal orientación existe o no.

Autores: M. Gutierrez, J. L. Scwarfiter, S. B. Tondato
Lugar: Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de La Plata.

Propiedades de la representación canónica de grafos hamiltonianos de intervalos.

Si G es un grafo y C es un ciclo de G se dice que C es extensible si existe un vértice x, de G, tal que $C \cup \{x\}$ es un ciclo de G.
Si un grafo es hamiltoniano y es ciclo extensible entonces desde cualquier ciclo es posible obtener un ciclo hamiltoniano.
Diferentes autores han probado que para ciertas clases de grafos, todo hamiltoniano es ciclo extensible(planares[2], intervalos[1]).
En 1990 Hendry conjetura que todo grafo cordal hamiltoniano es ciclo extensible.
Se estudia esta conjetura utilizando la herramienta proporcionada por las representaciones canónicas de un grafo cordal.
Se han obtenido resultados parciales en el caso particular de intervalos propios y de intervalos.

[1] A. Abueida, R. Sritharan, Cycle extendability and Hamilton cycles in chordal graph classes, (2004) preprint.
[2] T. Jian, Planar Hamiltonian chordal graphs are cycle extendable, Discrete Mathematics, 257(2002), 441-444.

Autores: Liliana Alcón, Luerbio Farias, Celina Figueiredo, Marisa Gutierrez
Lugar: UNLP - UFRJ

El problema de reconocimiento de los grafos Clique es NP-completo

Un *clique* de un grafo es un subconjunto maximal de vértices mutuamente adyacentes. Un grafo G se dice un *Grafo Clique* si es el grafo intersección de los cliques de algún grafo H. Varios problemas relacionados con los cliques de un grafo han sido estudiados en las últimas décadas, como introducción a los mismos puede verse, por ejemplo, [3]. Entre estos problemas es de particular importancia el de reconocimiento de los grafos Clique: *dado un grafo G determinar si G es o no un grafo Clique.* En [1] y en [2] se presentaron caracterizaciones de los grafos Clique, sin embargo a partir de ellas no se pudo obtener un algoritmo eficiente de reconocimiento.

En este trabajo probamos, mediante una reducción de 3-SAT, que el reconocimiento de los grafos Clique es un problema NP-completo. Planteamos la busqueda de algoritmos de aproximación y de clases de grafos en las cuales el problema sea polinomial.

References

[1] L. Alcón, M. Gutierrez, A new characterization of Clique graphs, *Matemática Contemporânea*, **25**, 2003, 1–7.

[2] F. S. Roberts, J. H. Spencer, A characterization of Clique graphs, *Journal of Combinatorial Theory B* **10**, 1971, 102–8.

[3] J. L. Szwarcfiter, A survey on Clique graphs, in *Recent Advances in Algorithmic Combinatorics*, C. Linhares-Sales and B. Reed, eds.,Springer-Verlag, 2002.

Autores: Leoni Valeria, Escalante Mariana
Lugar: Universidad Nacional de Rosario

Sobre grafos de empaquetamiento totalmente balanceados

Deng et al (1) estudian el total balanceo de los juegos combinatorios de cubrimiento y empaquetamiento en términos de la matriz $0,1$ que define cada juego.
En un trabajo reciente, van Velzen (2) caracteriza el total balanceo de un juego de cubrimiento en términos de la perfección de la matriz que lo define. Este resultado motiva el análisis de cierta familia de grafos asociados a los juegos de empaquetamiento totalmente balanceados, con el objeto de avanzar en el conocimiento de estos últimos.
En este trabajo definimos a los grafos PTB como aquellos para los cuales su matriz clique-nodo define un juego de empaquetamiento totalmente balanceado. Además, introducimos a los grafos *estable-perfectos* como aquellos para los cuales el tamaño de la máxima clique coincide con el número cromático para él y para todo subgrafo obtenido por borrado de conjuntos estables maximales. Mostramos que un grafo es PTB si y solamente si es estable perfecto.
Con el objeto de hallar en el futuro, una caracterización en término de menores prohibidos, introducimos el concepto de grafo *mínimamente no estable-perfecto* (MNSP). Mostramos algunas familias de grafos MNSP halladas.

(1) Bas van Belzen. (2005): *Discussion Paper: Simple Combinatorial Optimisation Cost Games.* ISSN 0924-7815.
(2) Deng, X., Ibaraky, T., Nagamochi, H. and Zang W. (2000): *Totally balanced combinatorial optimization games.* Math. Program. Ser. A **87** , pp. 441–452.

Autores: Jaume, Daniel A. (1), Massó, Jordi (2), Neme, Alejandro (1)
Lugar: (1) U. N. de San Luis, (2) U. Autónoma de Barcelona

Estructura de orden sobre el Conjunto de Equilibrios Competitivos de un Juego de Asignación Muchos-a-Muchos, Heterogéneo y Asimétrico

Estudiamos una generalización del juego de asignación de Shapley-Shubik [3] a un contexto muchos-a-muchos. Se modela un mercado bilateral heterogéneo con dinero, en el cual cada agente ofrece o demanda una cierta cantidad entera de unidades de los diferentes tipos de bienes. En el conjunto de precios de equilibrio competitivo, los agentes de cada lado del mercado pueden comparar los distintos resultados al menos de dos maneras distintas, mirando sólo precios, o considerando la utilidad que le reporta la canasta de bienes adquirida o vendida. La primera forma de comparar distintos equilibrios produce una estructura retícular (lattice) dual, con oposición de intereses entre ambos lados del mercado (que es lo que ocurre habitualmente en estos modelos, ver [1], [2], [3], y [4]). La segunda forma de comparar equilibrios sólo da estructura reticular para un lado del mercado, los compradores. Se pierde la dualidad y la oposición de intereses con los vendedores, para los cuales comparar vía utilidad es sólo un preorden. La introducción de la noción de **segmentación** de mercados, explica de manera satisfactoria la pérdida de la dualidad y la oposición de intereses al comparar equilibrios vía utilidad.

Referencias:

1. Camiña, E (2005). A generalized assignment game, UAB_IDEA, preprint.
2. Shapley, L. S., and Shubik, M. (1972). The assignment game I: the core. The International Journal of Game Theory, 1, 111-30.
3. Martínez, R., Massó, J., Neme, A. and Oviedo, J. (2001) “On the lattice structure of the set of stable matchings for a many-to-one model”. Optimization, 50, pp. 439-457.
4. Sotomayor, M. (1992) “The multiple partners game”. In: Majumdar M (ed.) Equilibrium and dynamics: Essays in Honor to David Gale Macmillian , pp. 322-336.

Autores:Erica G. Hinrichsen, Gabriela R. Argiroffo, Silvia M. Bianchi
Lugar: Departamento de Matemática. Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario

Sobre Facetas del Poliedro de Cubrimiento de Conjuntos

Dada una matrix A $m \times n$ $0,1$ sin filas ni columnas nulas, el *poliedro de cubrimiento de conjuntos* asociado a A, se define como la cápsula convexa de soluciones de $Ax \geq \mathbf{1}$ y $x_j \in \{0,1\}$ para todo $j = 1,\ldots,n$. La descripción de este poliedro en términos de sus *facetas* ha sido estudiada por diversos autores, (ver Balas y Ng [1], Cornuéjols y Sassano [2], Sassano [3] entre otros).

En este trabajo establecemos una caracterización de las desigualdades que describen facetas del poliedro de cubrimiento de conjuntos. Utilizando este resultado, generalizamos una condición suficiente dada por Sassano (1989).

También obtenemos condiciones necesarias que satisfacen las desigualdades que definen facetas, generalizando una condición encontrada por Cornuéjols y Sassano (1989) para el caso particular de la desigualdad de rango.

Palabras claves: cubrimiento, empaquetamiento, desigualdad de rango, faceta.

Referencias

[1] E. Balas, S. M. Ng, *On the set covering polytope: I. All the facets with coefficients in* $\{0,1,2\}$, Mathematical Programming 43, pp. 57–69, 1989.

[2] G. Cornuéjols, A. Sassano, *On the 0, 1 facets of the set covering polytope*, Mathematical Programming 43, pp. 45–55, 1989.

[3] A. Sassano, *On the facial structure of the set covering polytope*, Mathematical Programming 44, pp. 181–202, 1989.

Autores: Osio, Elsa - Braicovich, Teresa - Bernardi, Cora
Lugar: Universidad Nacional del Comahue

Sobre el Espectro del digrafo adjunto y (h,j) adjunto de un multidigrafo k-regular

Resumen:

En este trabajo en el que relacionamos la Teoría de Grafos con la Teoría de Matrices, en particular la de Polinomios Característicos de Matrices y Espectro de un Grafo, nuestro objetivo es demostrar mediante representaciones matriciales adecuadas, que la matriz de precedencia del digrafo adjunto de un multidigrafo k-regular de n vértices, tiene como autovalores a k con multiplicidad n y a cero con multiplicidad $n.(k\text{-}1)$. También demostraremos que la matriz de precedencia del digrafo (h,j) adjunto de un multidigrafo k-regular de n vértices, tiene como autovalores a k^h con multiplicidad $n.k^j$ y a cero con multiplicidad $n.k^j.(k^h\text{-}1)$.

Referencias bibliográficas:

- Chiapa, R. “Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos”. INMABB-CONICET. Universidad Nacional del Sur. (1982).
- Chiapa, R. Sanza, C. “Grafos y Matrices”. Universidad Nacional del Sur. (1999).
- Hemminger and Beineke. “Line graphs and line digraphs”. Selected Topics in Graphs Theory. Academis Press (1978).
